「趣味で量子力学」サンプル

＊本サンプルは、2020 年 3 月 26 日時点のものです。

＊書籍仕様については、以下弊社 web サイトをご覧ください。
https://www.rikohtosho.co.jp/book/1343/

趣味で量子力学

広江克彦 著

理工図書

序文

まず最初に、この本の売れ行きを落としかねない正直な話をしておこう。いや、ひょっとするとこの話によって買ってくれる人が増えるかも知れないという期待もある。イチかバチかの賭けは大好きだし、どちらにしても正直に書くのが一番気楽だ。

量子力学を理解する一番の近道は、まず線形代数という数学の一分野を学ぶことであろう。量子力学の理論の根底にあるのは、まさに線形代数だからである。

しかし量子力学に興味があっても数学にはそれほどの興味は無いという人にとっては、それが近道だと言われてもなかなか辛い道になるのかも知れない。線形代数というのもそれなりに奥の深い学問なので、「量子力学を理解するには一体これをどこまで学んだら良いのだろう？」とか、「これのどこが量子力学の役に立つというのか？」という疑いや不安に襲われたりもする。

線形代数を学び終えたら、次はフーリエ解析という数学を学んでおくのが良いだろう。これは「複雑な波形であっても、単純なサイン波やコサイン波の足し合わせで表現できてしまう」という驚くべきアイデアについての学問であり、それは量子力学の中心的なアイデアでもある。実はこのフーリエ解析そのものが深いところで線形代数と繋がっていたりする。

これらの他にさらに知っておいた方が良い数学は、微分方程式の解法についての理論である。量子力学ではシュレーディンガー方程式というものが出てきて、これを解くことが量子力学の基本となるわけだが、これがまさに微分方程式になっているからである。微分方程式は一定の手順で必ず解けるというものではなく、場合によって方法を変えないといけない。少し複雑な微分方程式を解こうとすると、線形代数やフーリエ解析の知識が必要になってくる。要するに、これらの数学はどれも幾つかの部分でガッ

チリと繋がっているのである。

さて、ここで「急がば回れ」という言葉について考えてみよう。この場合、この言葉をどう当てはめたら良いだろうか。読者が量子力学の知識を急いで身に付けたいという願いを持っているとする。その為には、かなり遠回りに見えるけれども先に必要な数学をじっくり身に付けた方が結局は理解が早かったということになりそうだ。色々と苦労してすでに量子力学を身に付けた人にはそういう感想を持つ人も多いだろう。

しかしそれが本当に近道だというのなら、あともう少しだけ遠回りしてみてはいかがだろうか。具体的には、この本を読んでから数学に手を付けるのも悪くないのではないか、と思うのである。読み終わるのにそれほど時間は取らせないつもりだ。

というわけで、この本ではあらかじめ線形代数やフーリエ解析などを知っていることを前提とはしないで行く。そのせいで、少々じれったい、遠回りの説明になってしまうことになるだろう。すでにこれらの数学を学んだことのある読者は高みの見物を楽しんで欲しい。「ここの説明は線形代数を知っていればずっと楽なのに、苦労してるよなぁ」だとか、「フーリエ解析を知っていればこの部分は丸々要らないよね」とか言えるはずだ。

あるいは、この本を読んだ後で線形代数やフーリエ解析にチャレンジしてみたくなった人は、それらを学んで行くに従って武者震いをし始めるかもしれない。「もしかして、線形代数やフーリエ解析の知識を前提とした量子力学の教科書を書いてみたならば、この本よりもずっとずっとコンパクトにまとめられるのではないか？」と。それを試してみたくて、居ても立ってもいられない気分になる人も出てくるだろう。

数学だけ学んでみてもそれで量子力学の考え方が自然に思い付くわけではないので、どこかで抽象的な数学と具体的な量子力学との関係を説明しておくことが必要になる。この本ではそこに重点を置きたいと思う。数学的な厳密さや、きっちり体系的にまとまった美しさは犠牲にする。量子力学がどんな風に数学を使うのかをざっと把握できていれば、その後で関連する数学を学ぶときには広い視野で楽に知識を吸収できるようになるだろう。

この本がどのような本であるべきか、今の気持ちをまとめると次のよう

になる。学ぶときのスピード感を重視する。説明が少し冗長であったとしても、つまづかずに一気に読み通せるものにしたい。歴史順の説明にこだわらず、体系的にまとめられた美しさにもこだわらず、私の頭の中に整頓して収められている順に説明したい。そして、私の興味の趣くままに、時に寄り道もしながら、それでも突き進む。私の趣味によって取捨選択された内容の量子力学に、しばらく付き合ってみてほしい。

2013 年 11 月 26 日
広江　克彦

目 次

第1章　ミクロの世界の謎

1.1　知っていてほしい大事なこと

量子力学が誕生したのが 1923 年頃で、量子力学が完成したのがそれから 5 年以内の頃なのだから、もう 100 年近くも前のことだ。昔の人が何を考えて、どんな仮説を立てて、何に驚いて、どんなアイデアが失敗に終わったのか、そのようなことを説明してくれている本ならすでに沢山あるのでそちらに任せよう。大切なのは、現代の我々がミクロの世界について結局のところ何を理解したらいいかということだ。

ミクロの世界では我々の常識が通用しない法則が成り立っている、とはよく言われる話だ。しかし一体どこからがミクロの世界なのだろう？ 我々の常識が通用する世界と、通用しない世界の境い目はどこにあるというのだろう？ 実のところ、そんなものはない。この世の全てが我々の常識の通用しない法則で動いている。しかし多数の粒子の乱雑な動きに隠されてしまって我々にはそのような法則が見えなくなっているだけなのだ。我々は非常識な法則に従って動く多数の粒子の平均的な振る舞いを見て、それを常識だと信じてしまっている。

一般向けに書かれた解説書では、波がどんなものか、粒子がどんなものであるかが語られる。そして波の性質と粒子の性質とが共存できないものであることが強調される。しかしその後で、ミクロの世界では「物質は波であり粒子でもある」と解説される。ミクロの世界の不思議さを面白おかしく説明するためだ。もちろん、100 年前の科学者たちはそのようなことで頭を悩ませた。しかしもうそれから 100 年も経っているのだ。現代の科学者たちはそのような古臭い問題と格闘してはいない。

ミクロの物質はある数学で表されたルールに従う「何か」である。そのルールでは、ときに波に似た性質が現れることもあり、ときに粒子に似た

性質が現れることもある。それだけのことである。物質が実際に波であったり粒子であったりするわけではない。標語的に言えば『**物質は波でも粒子でもない**』のだ。

読者は量子力学が、ミクロの世界の全てを説明する理論だと思ってはいけない。量子力学が一応の完成を見てからすでに 100 年近くも経っているのである。量子力学はその後、素粒子の反応を説明するための「場の量子論」と呼ばれる理論へと発展している。この本で説明しようとしている量子力学というのは、そこへ繋がるまでの過渡的な理論に過ぎない。量子力学では素粒子の振る舞いまでは説明できない。

しかし素粒子の反応だけがミクロの世界の全てではない。原子の中での電子の振る舞い、分子の結合、金属の結晶の中で起きる様々な不思議な現象、半導体、超伝導、超流動、レーザー、量子コンピュータなど……。量子力学にはそのような幅広い応用が広がっているのである。

さて、世の中では「物質は粒子でもあるし波でもある」と言われるわけだが、物質が粒子的な性質を持つことを本格的に説明するのは、量子力学をさらに発展させた「場の量子論」の役目である。この本で扱うような量子力学の範囲では「世の中みんな波だらけ！」と言いながら踊りだしたくなるような世界観が強調されることになるだろう。この辺りについてはもう少し言っておかねばなるまい。実はミクロの世界での粒子性の例として語られる現象は、量子力学の範囲内で説明できてしまう話も多いのである。つまり波の性質だけを使って説明できてしまうものが意外と多いということである。

もう少し具体的に言っておこう。「電子はなぜ一定の質量を持った粒であるかのように観測されるのか」という話は「場の量子論」の範疇であり、この本の中では説明しない。一方、「原子の中にある電子はなぜ飛び飛びのエネルギーしか取れないのか」とか、「電子の角運動量はなぜ飛び飛びの値しか取れないのか」とかいう話は量子力学の範疇である。

光も物質も、粒子そのものではない。ただ粒子であるかのように振る舞うことのある何ものかである。同様に、波そのものでもない。ただ波であるかのように振る舞うことのある何ものかである。

古典の反対語は量子!?

「古典的（クラシック）」の対義語は何かと聞かれれば、もちろん「現代的（モダン）」と答えるのが普通であろう。ところが物理学者に同じ質問をすると大抵は「量子的」と答える。量子力学は物理の世界観を一変させた。それで量子力学登場以前の物理学をまとめて「古典物理学」と呼ぶようになったのである。「古典力学」と言えば、それは我々の日常で普通に成り立っているニュートン力学のことである。相対性理論も世の中を一変させたのだが、近頃ではすっかり古典物理学の仲間入りである。

1.2　光は波なのに粒々だった !?

電磁気学の基礎は 19 世紀の後半になってほぼ完成した。その真髄はマックスウェルの方程式と呼ばれる 4 つの方程式の組にまとめることができる。この 4 つを組み合わせると波動方程式と呼ばれる形になるのだが、これを解けば波の形の解が得られるのでそう呼ばれるのである。その波というのは電磁波のことであり、その速さが光の速さと同じであったことから光の正体は電磁波であるという強い証拠とされた。

と、この程度の解説しか書いてない本が多いのだが、速度が光と同じだというだけで同じものだと言い切ってしまったのであれば結論を急ぎすぎている。しかし少し考えればこれ以外にも証拠はいくらでもあって、電磁波と同様に光が横波であることや、物質を熱したときに出てくる放射（赤外線や可視光線、紫外線）や、高エネルギーの電子を物質にぶつけたときに発生するエックス線などの発生原理が電磁波として説明できることから光が電磁波だと結論できるのである。とにかく、速度が光と同じであったことはその中でも決定的な証拠であったのだ。

光の回折現象や屈折現象などの観察により光が波であることが昔から分かっていたので、電磁波の発見は光の正体を説明する大発見であった。

ところがだ。光がただの波だと考えたのでは説明のできない現象が発見された。金属に光を当てたとき、金属表面の電子が光に叩き出されて飛び

出してくるのである。この現象は「**光電効果**」と呼ばれている。金属は言ってみれば電子の塊である。金属の表面に光沢があるのは、表面の電子が光の波の電場によって揺さぶられ、揺さぶられた電子が再び電磁波を発生するからであり、光の反射というのはそういうものである。このように、普通は金属に光を当てれば光が反射されるものだが、光を当てることで電子そのものがはじき出されてくる場合もあるのである。

この現象の不思議なところは、どんな光を当てても電子が飛び出してくるわけではないという点だ。必要な条件は振動数である。振動数の高い光でなければこの現象は起きない。いくら強い光を当てても無駄なのだ。金属の種類によってこの最低限必要な振動数は違っている。そして、その振動数以上の光であれば、光の強さに比例して飛び出してくる電子の数は増えるのである。

光が普通の波だと考えるなら、光の強さというのは波の振幅の激しさに相当する。強い光を当てればそれだけ波のエネルギーが強いので、電子はいくらでも飛び出してくるはずだ。しかし、現実はそうではない。これをどう考えたらいいのだろうか？

そこにアルバート・アインシュタインが登場する。彼がこれを見事に説明してのけたのだ。特殊相対論の発表と同じ年、1905 年のことだった。彼がノーベル賞を取ったのはこの説明によってであって、相対性理論ではなかった。相対性理論は当時は科学者たちでさえ受け容れにくいもので、相対性理論を発表したことで逆にノーベル賞を危うくするところだったと言われている。

アインシュタインによる説明は簡単である。光は振動数に比例するエネルギーを持った粒のようなものであると考えた。ある振動数以上の光の粒は電子を叩き出すのに十分なエネルギーを持っているので金属にあたると電子が飛び出してくる。光の強さというのは電磁波の振幅の大きさではなく、光の粒の多さであると解釈する。エネルギーの低い粒がいくら多く当たっても電子を弾き出すことはできない。しかしあるレベルよりエネルギーが高ければ、光の粒の個数に比例した数の電子を叩き出すことができる。

この現象の他にも光がつぶつぶなものとして存在するのではないかという証拠は当時数多く出てきている。例えば、物を熱したときに光りだす現象がある。身の回りの物体は全て熱を持っており、普段からその温度に応

じた光を放っているのだが、我々の日常の温度で出てくるのは赤外線がメインなのでそれが目に見えていないだけである。温度が高くなるにつれて高い振動数の電磁波が多く含まれるようになり、目に見えるようになるわけだ。熱せられた鉄や溶岩が赤く光るのもこれである。このようにして出てくる電磁波のことを放射と呼ぶ。

温度と放射の強さの関係を一つの数式で表すのは難しく、ずっとできないでいた。しかしマックス・プランクが光のエネルギーがつぶつぶであるという仮定をして見事に一つの数式にまとめ上げるのに成功した。これが 1900 年のことである。

先ほどから「つぶつぶなもの」という表現を使っているが、物理ではこれを「**量子**」と呼ぶ。そこには「一定の量を持った粒」という意味が込められている。しかし、これはとても大切なことなので覚えておいてほしいのだが、量子というのは粒子そのものであることを意味してはいない。あたかも粒子であるかのように、一定の量としてやりとりされるものであることを意味している。アインシュタインもプランクも「光が粒子である」とは断言していない。ただ「量子的だ」と表現したのである。それはつまり「一定の量ずつエネルギーをやりとりする存在」だという意味である。

現在では光子（フォトン）という言葉もあり、光の粒が空間を弾丸のように飛んで行くイメージで説明される場面もよくあるが、それはそのようなイメージで説明してもあまり不都合がないし、むしろそうした方が説明が楽になるからそうするのである。しかし光は必ずしもそのような「実際の粒」として飛んで行くものだとは言えない。それでも光を粒子だとみなすこのイメージはとても便利なので、不都合が起こらない限りは私も使って行くことにしよう。

とにかく、この他にも色々な実験により、光は振動数 ν に比例したエネルギー、

$$E = h\nu$$

を持つ「粒子的なもの」であることが確かになってきたのである。このときの比例定数 h を「**プランク定数**」と呼ぶ。

さて、光はエネルギーの他に運動量も持つ。そのことは電磁気学から導かれる。光は波だと考えられていたので、光の持つ運動量は空間に広がって分布するものとして表されていた。すなわち運動量密度 $\boldsymbol{w}$ という形で表現されていた。また、光の持つエネルギーも同様にエネルギー密度 u として表されていた。これらの間には $u = c|\boldsymbol{w}|$ という関係が成り立っている。この c というのは光速度のことである。この関係式も電磁気学の範囲で導き出される話だ。

しかし、光が粒としてやりとりされるということが分かってきたので、光の粒の一つが持つエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の関係は密度で表す必要がなくなり、

$$E = c\,|\boldsymbol{p}|$$

と表せることになった。運動量はベクトルで表される量であるから太字で $\boldsymbol{p}$ のように書いているが、$|\boldsymbol{p}|$ はそのベクトルの長さ、つまり絶対値を意味している。

1.3　ド・ブロイ波

光は波なのだから、振動数 ν と波長 λ と波の速度 c との間には

$$c = \nu\lambda$$

という関係がある。この波の速度 c というのはもちろん光速度のことである。

ここまでに出てきた関係式を組み合わせることで、次のような変形ができる。

$$|\boldsymbol{p}| \ = \ E/c \ = \ h\nu/c \ = \ h/\lambda$$

光の粒のエネルギーは振動数に比例し、光の粒の持つ運動量は波長に反比例するということになる。別にこれは深遠な真理だというわけでもない。波の振動数と波長は反比例するものだし、光の粒のエネルギーと運動量は比例するというのだから、これは当たり前の話だ。当たり前ではあるが重

要な結果なので並べて書いてみよう。

アインシュタイン - ド・ブロイの関係式

$$
\begin{aligned}
E &= h\nu \\
|\boldsymbol{p}| &= h/\lambda
\end{aligned}
$$

これらは粒子性の特徴である「エネルギー E、運動量 $\boldsymbol{p}$」と、波動性の特徴である「振動数 ν、波長 λ」を結ぶ関係式であるという見方ができる。

それで、この関係を光だけでなく物質にも当てはめてみようと考えるのは自然な成り行きであろう。光は電磁気学では波として説明されたのに、粒のようにやり取りされる性質を持つということは、粒として存在している物質にも実は波としての性質があるのではないか、というのである。私はこういう類推、こういう発想はとても好きである。これはフランスの名門貴族で物理学者でもあるルイ・ド・ブロイが提案したので「**ド・ブロイ波**」とか、あるいは「**物質波**」とか呼ばれている。

当時としてはそんな波に何の意味があるのだと思える考えだったかも知れない。ところが、ド・ブロイの提案から数年後、それまで粒子だと信じて疑わなかった電子が波としての性質を持つことを認めざるを得ない実験結果が発表され始めた。「G.P. トムソンの実験」や「デヴィソンとガーマーの実験」と呼ばれるものが有名である。金属結晶に照射した電子が、ある方向にだけ強められて散乱されるのを確認したのだ。これは波が干渉してある条件を満たす角度にだけ強く跳ね返る様子に非常に似ている。これはド・ブロイが予言した波と同じ波長の波を考えれば説明ができるのだった。

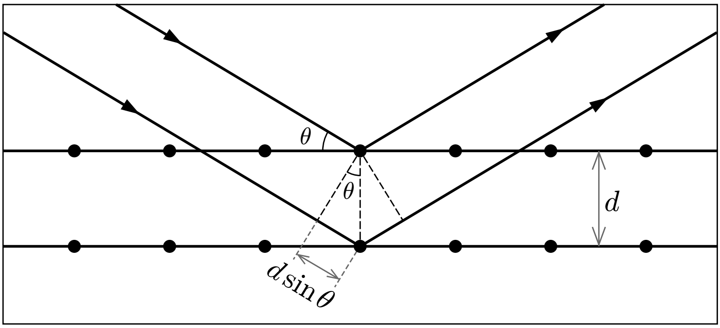
同様の現象はエックス線でも起こり、その場合には「ブラッグ反射」と呼ばれる。原理は全く同じである。

金属結晶というのは原子の並びが層状に積み重なったものだと見ることができる。その表面に並んだ層と二番目に並んだ層の間隔 d と、入射する波の波長 λ が同じくらいになっていると、この現象が見られる。具体的には次のような条件を満たす場合にだけ強く反射が見られ、そうでない場合

にはほとんど反射されないのである。

$$2d\sin\theta \;=\; n\lambda \qquad (n \text{ は整数})$$

表層で反射された波と、表層を通り抜けて二番目の層で反射された波とでは、再び合流するまでに進む距離に $2d\sin\theta$ だけの差が出ることになる。その距離がちょうど波長の整数倍ならば波の位相が一致して元と同じ強さに戻って出て行けるが、そうでなければ位相がズレて、再び合流したときに弱め合う結果となるのである。

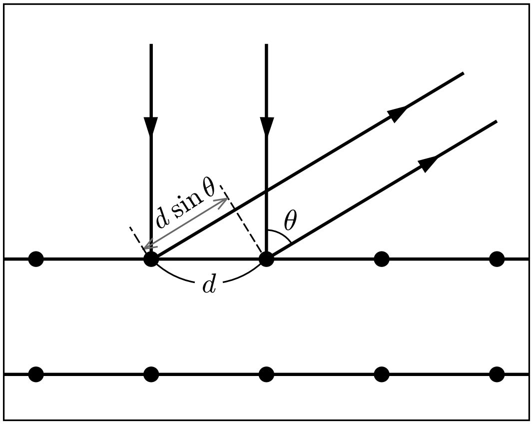


今は例として第一層と第二層だけを考えたが、さらに深い層まで入って反射した波についても同じことが起こる。それで上の条件が満たされていれば強い反射が起こるというわけだ。

ああ、申し訳ない。今の説明には少し誤解を誘う部分があった。「G.P. トムソンの実験」の方には今の説明が当てはまるのだが、「デヴィソンとガーマーの実験」の方はニッケルの単結晶の結晶面に向かって垂直に電子を照射する実験なので、説明図と条件式に少し違いがある。条件式は次の通りである。

$$d\sin\theta \;=\; n\lambda \qquad (n \text{ は整数})$$

こちらには 2 がついていない。この角度 θ の意味も d の意味も先ほどとは違っていて、次の図のような状況である。



先ほどは、それぞれ結晶の第 1 層と第 2 層とで跳ね返る場合に波の進む距離に違いがあることを問題にしていたが、この実験では、ある原子に当たって跳ね返る場合と、その隣の原子に当たって跳ね返る場合とで波の進む距離に $d\sin\theta$ だけの違いがあることが問題になっている。こちらの d は層間の距離ではなく、隣の原子との距離を意味している。このように多少の違いはあるものの、とてもよく似た原理で起こる現象だと言えるだろう。

この説明図を見ると真上から来た電子は真上に跳ね返るだけではないのかと不思議に思うかも知れないが、実際その通りで、ほとんどの電子は真上に跳ね返り、ほんの僅かな電子だけがあらぬ方向に飛び散る。角度が大きいほど、その数は減る傾向があるわけだ。ところが先ほどの条件に当てはまる方向付近にだけはその数が少し増えるのである。

どちらの実験も同じ頃に行われ、どちらも同時にノーベル賞を受賞している。ちなみに G. P. トムソンというのは、電子を発見したことでノーベル賞をもらった J. J. トムソンの息子であり、親子でノーベル賞をもらう結果になったわけだ。

それで結局、ド・ブロイ波の正体は何なのだろうか？ ある人はド・ブロイ波は物質を運ぶ波である、と考えた。物質粒子はド・ブロイ波に「波乗り」をして運ばれるのではないかという考えだ。これを「**パイロット波仮説**」と呼ぶ。パイロットというのは「水先案内人」という意味である。それに対して、物質そのものがド・ブロイ波なのだ、という人もいた。しかしどちらも言うだけなら簡単だが、そのモデルでうまく計算ができることを示さなければならない。

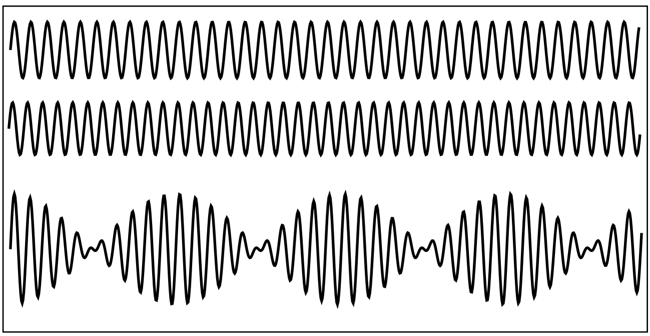
ド・ブロイ波は光の粒子性と波動性の関係から類推されたものであった。光の場合には、波動性の部分は電磁波として完全に説明される。するとド・ブロイ波の正体も電磁波かそれに非常に関わりのある何かではないかと考えたいところである。しかしながら、そう単純には言うことができない。問題はド・ブロイ波の速度である。周波数と波長を掛け合わせれば波の速度が求められるのだが、ド・ブロイ波の速度は光の速度にはならない。つまり、光の速度で進む「電磁波」と同じものとは考えられないのである。

ド・ブロイ波の速度はどれくらいだろうか？ 質量 m の粒子が速度 v で進むとき、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ であるし、運動量は mv である。すると振動数については $E = h\nu = \frac{1}{2}mv^2$ という関係式を作ることにより、$\nu = \frac{mv^2}{2h}$ であることが分かるし、波長については $|\boldsymbol{p}| = h/\lambda = mv$ という関係式を作ることにより、$\lambda = h/(mv)$ であることが分かる。波長と振動数を掛ければ波の速度になるわけで、ド・ブロイ波の速度は

$$\nu\lambda \ = \ \frac{mv^2}{2h} \cdot \frac{h}{mv} \ = \ \frac{v}{2}$$

であることが分かる。これは粒子の速度 v のちょうど半分だ。物質を運ぶ波にしては粒子について行けてないし、もし物質そのものを表わすのだとしたらその速度は物質の速度と一致しているべきではなかろうか。このように、等速直線運動する粒子という最も単純な状況で考えてすら、どこかおかしい。

しかし、まだ逃げ道はある。波には「うなり」と呼ばれる現象があるのだった。振動数の違う二つ以上の波が合わさったとき、波は「うなり」を生じる。



真空中を進む光や、空気中を進む音の場合には「うなり」も波と同じ速度で進む。しかし物質中を進む光や、物質中を進む振動の場合には状況が異なる。振動数の違いによって波の伝わる速度がわずかに異なるという現象が起こるのである。その結果として「うなり」は重ね合わせるそれぞれの波とは全く異なった速度で進むように見えることがある。この「うなり」の進む速度は「**群速度**」と呼ばれている。

先ほどの計算でも分かるように、ド・ブロイ波の速度は振動数によって違っているようだし、ひょっとすると、物質というのはド・ブロイ波の重ね合わせで出来た「うなり」が進む現象として説明できるのではないだろうか。

その通り！この説明はうまく行くのだ。実際、ド・ブロイ波の群速度は物質の速度と全く同じになることが計算できる！ド・ブロイが発表した論文に書かれている内容はそのようなことなのである。

さあ、この結果はなかなか感動的だ。だから、群速度というのが具体的にどんなもので、どういう計算をすれば今話した結果が導かれるのかという、少々長い説明をここに入れておきたい気もしてくる。しかしこれをあまり熱心に説明すると、この考え方こそが物質粒子の正体に迫る正しい道なのだと読者に期待させてしまいかねない。実は、残念ながらこのイメージは粒子が等速直線運動をしているようなかなり単純な場合にしかうまく当てはまらず、このままの形ではこれ以上の発展ができなかったのである。

科学史上の失敗についてじっくり考えることも大切だが、今の私は先を急いで、量子力学の本質に関わるもっと大事な話をさっさと終わらせてしまいたいと考えている。この辺りはまだ量子力学を理解するために必須の知識だというわけではないのである。こんなところで長々と時間を費やして読者を疲れさせるべきではないだろう。群速度のことが気になる読者のために巻末の付録 A に「位相速度と群速度」という見出しでまとめておいたので、あまり無理せず、暇なときに読んでもらえればと思う。ド・ブロイの考察は結局はうまく行かなかったが、量子力学へと繋がる重要なヒントを与えてくれたのだった。

ド・ブロイのイメージの弱点をもう少し話しておこう。もし物質の正体が、速度の微妙に異なるド・ブロイ波が重ね合わされることによって生じる「うなり」だとしたなら、いずれ二つの波はすれ違って離れてしまい、

重ね合わせは消滅してしまわないだろうか？ かと言って、無限の長さの波を考えていたのでは、「うなり」は無限に続くことになり、粒子はどこにでも同じように存在してしまうことになる。では、二つきりの波を考えるのではなく、幾つもの波を重ね合わせることにすればどうだろう？ そうすることで、ある場所にだけ「こぶ」のような形になる波を作ることができる。このようなひとかたまりになった波を「**波束**」と呼ぶ。しかし悲しいかな、速度の異なる波を重ね合わせて作っているがゆえに、これもいずれ形が崩れて行ってしまうのである。「**波束の崩壊**」と呼ばれる問題である。物質というのは長時間に渡って安定して存在し続けるものだが、その性質を再現することはできそうにない。

私の説明の微妙な嘘

私の説明は史実とは微妙に異なるので、時々こうして反省を入れずにはいられない。ここまで「アインシュタイン-ド・ブロイの関係式」という荒唐無稽な思い付きの方が最初にあったかのように話してきた。しかしド・ブロイは、ド・ブロイ波の群速度が物質粒子と同じ速度になるように調整しようとすれば、その結果として「アインシュタイン-ド・ブロイの関係式」が得られる、と主張したのである。順番が逆だ。しかしそのような説明をすると、なぜわざわざ群速度なるものを持ち出してそれが物質粒子の速度と同じになるようにしようと考えるに至ったのか、その必然性がうまく伝わらない気がしたのだった。

1.4　シュレーディンガー方程式

物質の正体を説明することまではできなかったが、ド・ブロイ波らしきものが存在することは実験で確認され始めた。そうなると単なる面白い思い付きだと笑ってはいられなくなる。それは一体どんな形をした波なのだろうということを真剣に考えざるを得ない。ある運動量を持つ物質のド・ブロイ波の波長はいくつだろうか、とか、あるエネルギーのときは振動数がいくつだというくらいの単純な計算では満足していられない。一体どんな条件の波が存在してどのように伝わっていくのだろうか？

説明を簡単にするために、ここからしばらくは物質の移動方向を一方向だけに限定して考えよう。先ほどまでは運動量の大きさを $|\boldsymbol{p}|$ のように表していたが、一方向を考えるだけならベクトルを使う必要がないので太字ではない p で表すことにする。

これまでに得ているヒントは「物質のエネルギーと運動量」と「ド・ブロイ波の振動数と波長」との間に次の関係があるということ。

$$E = h\nu$$

$$p = h/\lambda$$

そして、古典力学では物質のエネルギーと運動量の間には次の関係があるということ。

$$E \;=\; \frac{p^2}{2m}$$

これは高校生には $E = \frac{1}{2}mv^2$ という形式でよく知られている運動エネルギーの公式を、エネルギーと運動量の関係式になるように変形しただけのものである。もし運動エネルギーの他に位置エネルギー $V(x)$ まで考慮したければ、それを加えて、

$$E \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(x)$$

と書いてやればいい。

これらの条件を頼りにしてド・ブロイ波の形を求める方程式を作ってやることができるのだ。これからその方法を説明しよう。思わず「そんなのありかよ！」と叫んでしまうかもしれないような方法だ。

まず、振動数 ν、波長 λ の波動は、人によって慣れた形式は少々違うかも知れないが、

$$\psi(x,t) \;=\; A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right]$$

という式で表現できる。高校物理でも出てくるような式である。これは x 軸の正の方向に進む波動を表している。ここでちょっと代入をしてやって、λ と ν の代わりに p と E を使うことにしてやれば、

$$\psi(x,t) \;=\; A\cos\left[2\pi\left(\frac{px}{h} - \frac{Et}{h}\right)\right]$$

と書き直せる。さて、こいつと $E = \frac{p^2}{2m} + V$ の関係式とを組み合わせたいのだが、そのために上の式の中から p だけ、あるいは E だけを取り出すことをしたい。偏微分を使えばそれができるのである。

偏微分というのは $\psi(x,t)$ のように変数が二つ以上含まれる関数を、そのうちのどれか一つの変数だけで微分することである。他の変数は定数のように見なして計算してやればいい。

関数 ψ を x で偏微分すれば p が cos 関数の外に出てくるし、t で偏微分すれば E が出てくる。係数も一緒に出てきてしまうのだが、それは後で割ってやれば消える。どういうことか、実際にやってみることにしよう。

関数 ψ を x で偏微分してやると、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \;=\; -\frac{2\pi}{h} pA \sin\left[2\pi\left(\frac{px}{h} - \frac{Et}{h}\right)\right]$$

となる。この左辺の記号が偏微分の記号である。高校の数学で習う微分の記号に似ているが、少しだけ違っている。今日初めて偏微分というものを聞いたという読者は、こんな風に偏微分のためにわざわざ普通の微分とは別の記号を用意しなくてもいいのではないかと思うかも知れない。しかしちゃんと区別して書いておかないと全く別の意味になってしまう場面が出てくるのである。それについてもきちんと話しておきたい気がするが、今はそんな心配は要らないのでこのまま話を進めることにしよう。

cos 関数だったものが sin 関数に変わってしまうという副作用があるが、中に入っていた p を外に出してくることができた。係数が邪魔なのであらかじめ掛けておけばもっとすっきりする。

$$-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x} \;=\; pA \sin\left[2\pi\left(\frac{px}{h} - \frac{Et}{h}\right)\right]$$

しかし、もっとすっきりした形で書き表したいのだ。cos 関数が sin 関数に変わりさえしなければ、右辺も ψ を使って表せるのだが……。

そう言えば、微分しても形の変わらない関数があった。それは「指数関数」である。もし cos 関数の代わりに指数関数を使えたら……。ここで数学のトリックを使う。「**オイラーの公式**」という大変便利な公式があるのだ。それは、

$$e^{i\theta} \;=\; \cos\theta \;+\; i\sin\theta$$

というもので、複素関数論を学べばすぐに出てくる公式である。i は 2 乗すると -1 になる虚数を意味している。ここでもし、先ほどの波の式の代わりに

$$\psi \;=\; A\,e^{\frac{2\pi i}{h}(px-Et)}$$

というものを採用すれば、これはオイラーの公式により

$$\psi \;=\; A\cos\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right] \;+\; iA\sin\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right]$$

ということであって、虚数部分がおまけに付いてきたことを除けばさっきまでの関数と同じである。虚数部分の sin 関数が邪魔だが、虚数部分はとりあえず無視してやることにしよう。そんなことをしてもいいのかと気になるかも知れないが、そこを考えるのは後回しだ。まずは生まれ変わった指数形式の波動関数 ψ を偏微分してみよう。すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} \;&=\; \frac{2\pi i}{h}\,p\,A\,e^{\frac{2\pi i}{h}(px-Et)}\\ &=\; \frac{2\pi i}{h}\,p\,\psi\end{aligned}$$

と書ける。右辺の係数が邪魔に見えるのであらかじめ割っておけば、

$$-i\,\frac{h}{2\pi}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \;=\; p\,\psi$$

とすっきりした形になった。

ところで、ここまでの変形を見ると、いつも h と 2π が一緒に現れていることに気付くだろう。毎回これらを分数の形式で書かなければならないのは非常に面倒臭いし、式も分かりにくくなるというので、次のような記号を定義することにする。

$$\hbar \;\equiv\; \frac{h}{2\pi}$$

この $\hbar$ は「**エイチ・バー**」と呼ばれている。h に横棒を付けたものだからだ。この値を「**ディラック定数**」と呼ぶ人もいる。これを使えば、先ほどの式はさらに簡単に、

$$-i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \;=\; p\,\psi$$

と表せるようになる。

同じことを E についてもやりたければ x の代わりに t で偏微分して計算することで、

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \ = \ E\psi$$

という関係を得ることができる。

つまり、波動関数 $\psi(x,t)$ を x で偏微分して $-i\hbar$ をかけてやれば運動量 p がいつでも式の中から飛び出してくるし、t で偏微分して $i\hbar$ をかけてやればエネルギー E の値がいつでも式の中から取り出せるというわけである。しかも関数 ψ の中身の形を変えずに！

このことを利用して古典力学の関係式 $E = \frac{p^2}{2m} + V$ に当てはめてみよう。この両辺に ψ を掛けると次のようになる。

$$E\psi \ = \ \frac{p^2}{2m}\psi \ + \ V\psi$$

これに上の関係式を代入してやればいい。p^2 の部分をどうしたらいいかと困るかも知れないが、ψ から p^2 を取り出すには ψ を x で偏微分することを 2 回連続して行い、$-i\hbar$ を 2 回かけてやればいい。

$$(-i\hbar)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \ = \ p^2\,\psi$$

そのようにして作ったのが次の式だ。

1 次元のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \ = \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \ + \ V\psi$$

これは「古典力学の関係を満たす運動量とエネルギーの組を同時に取り出すことのできる波動関数 ψ はどのような形のものか」という意味の方程式になっている。

歴史的にはド・ブロイ波の存在が実験で確かめられる以前にシュレーディンガー方程式が発表されている。やはり世の名声を勝ち取るためには時代を先取りしないとダメだということなのだろう。

本当のところを言うと、シュレーディンガーはここで説明したような理屈でこの方程式を導いたのではなかった。解析力学という分野に出てくる式を元にして導き出したことになっている。解析力学というのは数学のテクニックを駆使してニュートン力学をまとめ直したものであり、複雑な問題にも対処できる代わりに抽象的な概念があれこれ登場するのである。シュレーディンガーがこの方程式を導き出した最初の論文では、そのような抽象的な概念を使っていることに加えて、さらに独自の奇妙な細工を施してあるために、どうにも難解なものとなっている。その内容を現代の観点から解釈してやることはできるのだが、本当に最初からそのような考えで作ったのか疑わしいほどに考え方が飛躍している部分がある。しかし彼の論文からは、他人にはよく理解できない独自の思想のようなものが窺えもする。新しいアイデアというものは理路整然とはしておらず、試行錯誤の混沌の中から生まれるものだとも言えるかも知れない。

これは私の考えだが、ひょっとすると、当時はまだド・ブロイのアイデアは怪しいものだと思われていたので、すでに正統な学問として広く受け入れられていた解析力学の式を経由することで理論の信憑性を高めるという戦略を取ったのかも知れない。それ以降のシュレーディンガーの論文ではド・ブロイ波のイメージを前面に押し出し始めているのでド・ブロイのアイデアが彼を励ましたことは間違いないだろう。

ところで、先ほどの方程式を導く説明の途中から「**波動関数**」という言葉を使い始めているのに気付いたかも知れない。専門用語のような響きがあるが、この単語自体にはそれほど深い意味はない。波の形を数式で表した関数のことを波動関数と呼ぶのである。これは量子力学に限ったことではなくて、空気中を伝わる音波を表す式であっても、電磁波を表す式であっても、波動関数と呼んで差し支えない。ところがこの単語は量子力学で特に頻繁に使われるようになっているので、何の前置きもなく「波動関数」と言った場合、それはほとんどの場合シュレーディンガー方程式の解である関数のことを意味していると考えて間違いないといった状況になっている。実は私自身も、量子力学以外の本の中で波動関数という語が使われているのを目にすると、まるで量子力学の話をされているような違和感を覚えたりするほどである。

先ほどの導出過程について少し補足しておこう。波を指数関数で表すことに慣れていない読者は、最初は実数で表していた波動関数に虚数を取り入れた部分をかなり怪しく思うことだろう。そのような思いを軽減するために簡単な確認をしておくことにしよう。

先ほども計算したように、cos 関数を使った波動関数 ψ を偏微分すると、

$$-\frac{2\pi}{h}\,p\,A\,\sin\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right]$$

のように sin 関数に変わるのだった。一方、$Ae^{\frac{2\pi i}{h}(px-Et)}$ を x で偏微分してやった結果は、

$$\frac{2\pi i}{h}\,p\,A\,e^{\frac{2\pi i}{h}(px-Et)}$$

となるが、これはオイラーの公式を使って書き直せば、

$$\frac{2\pi i}{h}\,p\,A\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right]\;+\;i\sin\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right]\right\}$$

ということである。係数として飛び出してきた虚数 i を括弧の中にかけてやれば

$$\frac{2\pi}{h}\,p\,A\left\{\;i\cos\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right]\;-\;\sin\left[2\pi\left(\frac{px}{h}-\frac{Et}{h}\right)\right]\right\}$$

となって、第 2 項の方が実数になっている。つまり実数部分だけを見るようにしていればこちらも sin 関数に変化しており、微分した結果は全く同じであることが分かる。

このように、虚数部分はおまけのように付いているように見えて、実は微分計算をしたときに実数の三角関数の微分と結果が同じになるように助けてくれている、という見方もできる。指数形式で表した波の実数部分だけを見ていれば、実数だけで計算したときと同じなのである。三角関数の代わりにわざわざ虚数を導入してまで指数関数を用いるのは、微分しても関数の形が変わらないので計算が楽だという利点のためであると言えるだろう。

実際、色んな分野でこの利点を利用した実用的計算が行われている。波の計算をするときに指数関数で表しておいて、最終的に得られた結果の実

数部分だけを見るようにするのである。

こういう説明を聞かされると、波動関数に虚数が出てくるのは何か理解できない深い意味があると考えるより、単に数学を使った計算テクニックの結果だという気もしてくる。ところが量子力学の場合どうやらそうではなく、複素数として出てくる解にこそ本質的に意味があるらしいのだ。

シュレーディンガー方程式を作ったときの意味に従うのなら指数形式で表された解のみが許されるべきであって、さらにその実数部分のみがド・ブロイ波としての意味を持つはずである。しかし指数形式の解（単純な基本波）のみを認めるという制限をつけると、全く当たり前すぎて面白みのない解しか出てこないことになってしまう。それどころか、条件に合わないために解けないことの方が断然多くなってしまうのだ。そんな応用に使えないようなことではシュレーディンガー方程式がこれほど有名になることもなかったであろう。

そこで元の意味を離れて指数形式以外の解も解として認めることにしたのであるが、その結果、何とも解釈の難しい複素数で表された解があれこれと出てきてしまうことになってしまった。

では、適用範囲を広げて求められたこの複素数の解はどうやって解釈したらいいのだろう？ 虚数部分は一体何を表すのだろう？ 不思議なことに、求められた波動関数の複素数値の絶対値の 2 乗が粒子の存在確率を表すと考えると計算結果が事実と合うのである。素直に認めるべきか、うまく行く理由を考え直すべきなのか……。多分これが、シュレーディンガー方程式が発表された当時の人々の反応だったのではなかろうか。

確率解釈

波動関数の絶対値を 2 乗したものが粒子の存在確率を表す

正直なところ、これはもう受け入れるしかない部分だ。この世界がなぜか複素数を使った論理を自然法則として採用しているようなのである。どうせ受け入れろと言うなら最初から指数形式で表した複素数の波を使って説明した方が話はずっと簡単に済んだのかも知れない。しかしそれではい

かにも唐突過ぎて不親切ではないか。

私は初めて量子力学を学ぶ人が抱く「自然現象に複素数が出てくることに対する拒絶感」というものを知っている。かつての私がそうだったし、それを克服するのにとても時間がかかった。あまりカッコ良くない説明であることは分かっているが、拒絶感を少しでも和らげるため、どうしてもこのような説明の仕方をせずにはいられなかった。

量子力学というのはシュレーディンガー方程式を解くことがほとんど全てである。これを実際に解くためには位置エネルギー $V(x)$ として具体的な形の関数を指定してやる必要がある。この関数の形によって、非常に楽に解けたり、ほとんど無理だと思える難しさになったりする。解いてみると予想しなかったような結果が得られることがあるので、その解釈に困ったりもする。それで、慣れるまでの間は案内人が必要になるわけだ。

ハイゼンベルクの行列力学

ここまで全く触れなかったが、量子力学の発展にはもう一つの流れがあった。ハイゼンベルクの提案した行列力学というものである。

19 世紀末頃から様々な真空放電の実験が行われており、その放電の光をプリズムで分けたときの色の強さの分布を詳しく調べることが行われていた。これを「分光学」と呼ぶ。真空放電とは言っても完全な真空なのではなく、ガラス管の中にわずかな気体を入れて高電圧を掛ける。その気体物質の違いによって特徴的な光の筋が幾つも見られるのである。この観察によって原子内部のエネルギー状態についてかなり多くのことが分かっていた。

ハイゼンベルクは波動関数のような直接の観測にかからないものを理論に導入することを嫌い、この分光学的な観測結果を説明できることを目標に理論を作り上げて行ったのである。しかしその計算にはとても難解な手順が必要であり、大変説明しにくいものである。やがてこの理論はシュレーディンガーの理論と同等であることがシュレーディンガーによって示されたのだった。

一部として使うのである。意志の存在が状態を確定させるのか、そうではないのか。

ウィグナー先生は密閉された部屋の中にいる友人に電話で結果を尋ねる。「電灯は点いたかね？」さて、状態が確定したのはどの時点だろう。友人が電灯を見た時点か、先生からの電話を受け取った時点か、先生が結果を知った時点か。

電話の代わりに手紙を使うバージョンもあって、友人は実験結果を遠く離れた先生に書き送る。こちらには密閉された壁は出てこない。さて、状態が確定したのは友人が手紙を書いた時点か、先生が手紙を受け取った時点か、封を開けた時点か、手紙を読んだ時点か？

いや、私は人がどう思うかという憶測にはあまり興味は無いし、どの解釈にもこだわるつもりは無い。ただどの答えが本当なのかを知る方法があるのなら教えてもらいたいと思っている。

7.5 多世界解釈

観測によって状態がただひとつに定まる仕組みはまだ分かっていない、というのは何度も繰り返してきた。では何を行えば観測したとみなされるのだろうか。そもそも観測とは一体どういうものだと定義されているのだろうか。

実は、学問的に厳密な「観測の定義」というのはまだ作られていないのである。これまでのところはごく素朴に「状態についての情報を得ることである」と考えるだけで済ましてきたし、それ以上のことが言えるような状況ではないのだった。

観測をするという行為の一体何が状態を変えてしまうのか、観測の本質とは何かという部分はいつの日か解明されなくてはならない今後の課題である。

ところが、観測後に状態がただひとつに決まる謎について悩む必要のない解釈の仕方がある。「**多世界解釈**」と呼ばれるものだ。

先ほどのシュレーディンガーの猫の話では、ミクロの世界の状態がマク

ロな存在である猫の状態にまで結びついて、「二つの可能性が同時に存在している猫」になってしまっていたのだった。それは、明らかにおかしいと思ってもらえるように準備した喩え話ではあったが、この話を積極的に認めることにしてみよう。我々が何かを観測した後で、もしも外部にこれから我々のことを観測しようとしている者がいた場合には、我々自身がシュレーディンガーの猫のようになって複数の可能性が重なって存在しているのではあるまいか。それぞれに違った観測結果を得た我々自身が、消滅することなく同じ世界に生き続けていることになる。

「多世界解釈」という名前にはとてもインパクトがあって人々の興味を誘うには良いのだが、観測を行うたびに多数の世界に分かれるというニュアンスがあるせいで誤解を誘っているようだ。別に我々の観測のせいで世界が分裂するわけではない。我々自身も波動関数で記述される存在であって、その波動関数が多数の可能性が重なった状態で表現される形になるだけのことだ。

しかしイメージ的にはやはり SF に出てくるパラレルワールドに似ている気がする。パラレルワールドというのは、自分たちのいる世界とは別の選択をして分岐した別世界のことである。自分とは異なる観測結果を得た自分以外の自分が住む世界はまるでパラレルワールドのようではないか。ただ、「多世界解釈」がそのような SF と大きく違っているのは、異なる観測結果を得た自分自身のことを決して認識できないという点であろう。SF ではそのような他の世界と互いに行き来できたり、別世界の自分と出会ったり、過去に戻って重大な選択をやり直して歴史を変えてしまったりもする。多世界解釈はそのような空想の産物ではないのだ。

もしこのような多世界解釈のイメージが気に入ったとしても「私は多世界解釈を支持します」などと軽々しく発言するのは危険であることを注意しておこう。なぜなら、量子力学の解釈問題をめぐっては専門の研究者たちの間で激論が交わされており、どれかの解釈を「支持する」と言えば、それは「他の解釈に比べて明らかに優れていると主張できる理論的根拠があります」という意味で取られる可能性が高いからである。激論の内容をあまり知らなければ「私は多世界解釈のイメージが気に入っています」くらいの表現にとどめておくべきだろう。

このイメージをそのまま広げてゆくと、やがては宇宙全体を記述するたった一つの波動関数があって、それがシュレーディンガー方程式に従って変

化を続けるというイメージにまでたどり着く。しかしそれには明らかに無理があろう。宇宙全体が一定のエネルギーだとすると、波動関数は全体の位相が変化するだけであって何も面白い変化が起きないからだ。たとえ宇宙が、この世界で起こり得るありとあらゆる全ての可能性を表現していたとしても、それらを繋ぐ変化がなければ何の意味があるだろうか。いや、こんなことを言っても、そもそも宇宙全体がこんな単純な方程式に従っているはずはないだろうから、この点を責めて多世界解釈をおかしいと言うわけにはいかない。

議論の焦点は別のところにある。果たして多世界解釈は、確率解釈に頼らないで済む、他より上位の優れた理論になり得るだろうかというものだ。シュレーディンガー方程式だけで観測の瞬間に起きることの説明が付くものだろうか。それまで同時に存在して干渉を起こしていた幾つかの可能性が、互いに干渉を起こさない複数の状態の重ね合わせへと勝手に変化することはあるだろうか。このような干渉性（コヒーレンス）の消失のことを「**量子デコヒーレンス**」と呼ぶ。それは周囲からの熱的な影響によって説明可能だという説もある。もしそれが正しいなら、我々がわざわざ観測を行わなくても、ミクロの熱的な雑音の影響によって状態は次々と勝手に確定して行っていることになる。あるいは観測という行為が、デコヒーレンスを引き起こす撹乱の一つだと言えるようになるかも知れない。シュレーディンガーの猫の問題を解決できそうな話だ。しかしこのようなことが説明できなければわざわざ多世界解釈を選ぶことに有利な点は何もなくて、主流の確率解釈を頼りにイメージを広げただけの世界観だと言わざるを得ない。

量子力学はその基礎が確立してから 100 年近くも経ち、科学の中ですでに揺るがぬ地位を占めているわけだが、根本の部分にはまだまだ解決すべき課題、ひょっとしたら近いうちに解決できるかも知れない難しい課題が残されているのである。

人の意志とは何だろう？ 目の前にいる君は唯一の君なのだろうか？

索 引

■さ■

■た■

■な■

■は■

【著者紹介】

広江　克彦（ひろえ かつひこ）

1972年生まれ。岐阜県出身。
静岡大学理学部物理学科卒。
同大学院修士課程修了。
'00年より、物理学を解説するウェブサイト
「EMANの物理学」の運営を開始。
その内容が徐々に評価され、
'07年に『趣味で物理学』を、
'08年に『趣味で相対論』を続けて上梓。
現在は農業に片足を置きつつ、執筆に励む。
　EMAN（エマン）は中学の頃からのあだ名であり、
ネットでも主にその名前で活動している。

趣味で量子力学

2015年12月11日　初版発行
2018年3月20日　3版発行

検印省略

著者　広江克彦
発行者　柴山斐呂子

発行所
理工図書株式会社
〒102-0082　東京都千代田区一番町27-2
電話　03（3230）0221（代表）
FAX　03（3262）8247
振込口座　00180-3-36087番

ISBN978-4-8446-0837-0
印刷・製本：丸井工文社

ISBN978-4-8446-0837-0
C1042　￥2000E

定価（本体 2000 円＋税）
物理
物理／量子力学