練習問題解答編

２章：ラプラス変換

1. (1) ラプラス変換表を用いて

$$\mathcal{L}[t^2-2t-1]=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}$$

であるから、公式

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$$

を用いて

$$\mathcal{L}[(t^2-2t-1)e^{2t}]=\frac{2}{(s-2)^3}-\frac{2}{(s-2)^2}-\frac{1}{s-2}$$

(2) 双曲線関数の定義より

$$\mathcal{L}[\sinh t]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^t-e^{-t}]=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right\}=\frac{1}{s^2-1}$$

であるから

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sinh t]=\frac{1}{(s+2)^2-1}$$

(3)$g(t)=1-\cos at$ と置きラプラス変換すると

$$G(s)=\int_0^\infty(1-\cos at)e^{-st}dt=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+a^2}$$

となる。さらに

$$\mathcal{L}[\frac{y(t)}{t}]=\int_s^\infty Y(p)dp$$

を利用することで、ラプラス変換が求められる。

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_s^\infty\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+a^2}\right)dp$$

$$= \left(\log_e p - \log_e \sqrt{p^2+a^2}\right)\Big|_s^\infty$$
$$= \log \frac{p}{\sqrt{p^2+b^2}}\Big|_s^\infty$$
$$= \log_e \frac{\sqrt{s^2+b^2}}{s}$$

(4) 二つの公式

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-sa}F(s), \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

を用いて

$$\mathcal{L}[(t-a)^n u_H(t-a)] = \frac{n!}{s^{n+1}}e^{-as}$$

(5) 微分公式 (2.15) より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\frac{d\sin(\omega t+\theta)}{dt}] &= s\mathcal{L}[\sin(\omega t+\theta)] - \sin\theta \\ &= s\mathcal{L}[\sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta] - \sin\theta \\ &= \frac{s\omega}{s^2+\omega^2}\cos\theta + \frac{s^2}{s^2+\omega^2}\sin\theta - \sin\theta \\ &= \frac{s\omega\cos\theta - \omega^2\sin\theta}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

2. $y(t) = y(t+nT)$ の周期関数の場合

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T y(t)e^{-st}dt$$

となる。$f(t) = f(t+2nT)$ であるため

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2Ts}}\int_0^{2T} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2Ts}}\left(\int_0^T e^{-st}\times 1dt + \int_T^{2T} e^{-st}\times 0dt\right)$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2Ts}}\frac{1}{s}(1-e^{-Ts}) = \frac{1}{(1+e^{-Ts})s}$$

3. (1) 部分分数展開すれば

$$\frac{2}{s(s+1)^3} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

となる。よって、ラプラス逆変換は

$$f(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t^2e^{-t} = 2 - (2+2t+t^2)e^{-t}$$

と求まる。

(2) 部分分数展開すれば

$$\frac{s^3+5}{s^3(s+1)} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s^3} - \frac{4}{s+1}$$

となる。よって、ラプラス逆変換は

$$f(t) = 5 - 5t + \frac{5}{2}t^2 - 4e^{-t}$$

と求まる。

(3) 部分分数展開すれば

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{s+2}{2(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

となる。よって、ラプラス逆変換は

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

と求まる。

(4)$s^2-6s+7=(s-3)^2-2$ より

$$-\frac{s^2-6s+7}{(s-3)^3}=-\frac{(s-3)^2-2}{(s-3)^3}=\frac{2}{(s-3)^3}-\frac{1}{s-3}$$

であるから、ラプラス逆変換は

$$f(t)=(t^2-1)e^{3t}$$

と求まる。

(5)s 領域での微分公式より

$$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

であるから、ラプラス逆変換は

$$f(t)=t\sin\omega t$$

と求まる。

4. (1) 両辺にラプラス変換を施すと

$$s^2Y(s)+5sY(s)-6Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

$Y(s)$ について解き、逆変換を求める。

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+6)} \\
&= -\frac{1}{74}\frac{5s+7}{s^2+1}+\frac{1}{14}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{259}\frac{1}{s+6} \\
y(t) &= -\frac{1}{74}(5\cos t+7\sin t)+\frac{1}{14}e^t-\frac{1}{259}e^{-6t}
\end{aligned}$$

(2) 両辺にラプラス変換を施すと

$$s^2Y(s)-s-1+sY(s)-1+Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$Y(s)$ について解き、逆変換を求める。

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^3+4s^2+6s+5}{(s^2+2s+2)(s^2+s+1)} \\
&= \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
y(t) &= e^{-t}\cos t + \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t
\end{aligned}
$$

5. (1) 第一式より

$$
(s+1)X(s) - sY(s) = -\frac{s-2}{s(s-1)^2}
$$

第二式より

$$
2sX(s) - (s+1)Y(s) = -\frac{1}{s^2(s-1)}
$$

を得る。

(2) 上の二つの式より、[例題 2.10] と同様の計算により

$$
X(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}, \quad Y(s) = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}
$$

を得る。

(3) $X(s), Y(s)$ は各々つぎのように部分分数展開できる。

$$
X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}, \quad Y(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-1)^2},
$$

したがって、それらのラプラス逆変換は次式で与えられる。

$$
x(t) = 1 - e^t + te^t, \quad y(t) = -t + te^t
$$

6.

$$
\sin^2 tx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2tx)
$$

であるから

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 2tx}{x^2}\right) dx$$

これをラプラス変換すれば

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 2tx}{x^2}\right) dx\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left\{\int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-st}\cos 2tx dt\right\} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{sx^2} - \frac{s}{x^2(s^2+4x^2)}\right) dx = 2\int_0^\infty \frac{dx}{s(s^2+4x^2)} \\
&= \frac{1}{s^2}\tan^{-1}\frac{2x}{s}\Big|_0^\infty
\end{aligned}$$

より

$$F(s) = \frac{\pi}{2s^2}$$

となる。これを逆変換すれば

$$f(t) = \frac{\pi}{2}t$$

を得る。とくに、$t = 1$ とすれば

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

である。

7. 両辺にラプラス変換を施すと

$$sX(s) - 1 = \frac{s}{s^2+1}X(s)$$

X(s) について解き、逆変換を求めると、つぎの解を得る。

$$X(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

$$x(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$$

3章：線形代数の基礎

1. (1) 行列式は第一列で列展開すれば

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} = 4$$

となる。逆行列は

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 16 & -12 \\ 6 & -2 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & 12 \\ 0 & 0 & -14 & -10 \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

で与えられる。

(別解) この行列式は

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ A_{12} = A_{11},\ A_{21} = O_{2\times 2},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

とおけば、ブロック三角行列の公式より

$$\det A = \det A_{11} \det A_{22}$$

容易に計算できる。また、逆行列は，定理 3.1 より

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{22}^{-1} \\ \hline O_{2\times 2} & A_{22}^{-1} \end{array}\right]$$

で計算できる。

(2) 行列式は，直接計算し，$2\sqrt{2}$ となる．逆行列も公式を用いて

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

(3) 行列式は第四行で行展開すれば

$$\det A = a_{44}\Delta_{44} = -1$$

となる。逆行列は (1) と同様に $\mathrm{adj}A$ を計算し

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 2\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

2. (1) 固有値は

$$\det(sI_2 - A) = s^2 + 4s + 3 = 0$$

より、$-3, -1$ となる。対応する固有ベクトルより変換行列を作ると

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

となり、対角行列は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

(2) 固有値は

$$\det(sI_2 - A) = s^3 - 7s^2 + 14s - 8 = 0$$

より、1,2,4 となる。対応する固有ベクトルより変換行列を作ると

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、対角行列は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

(3) 固有値は

$$\det(sI_2 - A) = (s-1)(s-2)(s-3) = 0$$

より、1,2,3 となる。対応する固有ベクトルより変換行列を作ると

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、対角行列は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

3. 特性方程式は $\det(sI_3 - A) = (s-3)^3 = 0$ であるから、固有値は $\lambda_1 = 3$ と重複度 $n_1 = 3$ となる。$\mathrm{rank}(\lambda_1 I_3 - A) = 2 = 3-1$ となるので、$p_1 = 1$ となる。これより、$n_1 = 3$ であるから、$n_1 > p_1$ であり、λ_1 の独立な固有ベクトルの数は重複度より少ないことがわかる。すなわち、行列 A は単純ではない。$p_1 = 1$ の場合の変換行列の求め方を用いて

$$T_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり

$$T_1^{-1}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから、$T_1^{-1}(\lambda_1)AT_1(\lambda_1)$ よりジョルダン標準形は

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。

4. ケーリ・ハミルトンの定理より、$A^3 - 2A^2 - 3A + 6I_3 = 0$ が成り立つ。これより

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A - 3I_3)(A + I_3) = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

４章：状態空間表現

1. (1)$(sI_3-A)^{-1}$ を計算すれば

$$(sI_3-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-4)} \times$$
$$\begin{bmatrix} (s-2)^2 & s-2 & s-2 \\ s-2 & (s-2)(s-3)-1 & 1 \\ s-2 & 1 & (s-2)(s-3)-1 \end{bmatrix}$$

であるから、各要素をラプラス逆変換すれば

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2e^t+4e^{4t} & -2e^t+2e^{4t} & -2e^t+2e^{4t} \\ -2e^t+2e^{4t} & 2e^t+3e^{2t}+e^{4t} & 2e^t-3e^{2t}+e^{4t} \\ -2e^t+2e^{4t} & 2e^t-3e^{2t}+e^{4t} & 2e^t+3e^{2t}+e^{4t} \end{bmatrix}$$

(2)$(sI_3-A)^{-1}$ を計算すれば

$$(sI_3-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} \times$$
$$\begin{bmatrix} (s-2)(s-3) & s-3 & s \\ 0 & (s-1)(s-3) & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-2) \end{bmatrix}$$

であるから、各要素をラプラス逆変換すれば

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & -e^t+e^{2t} & \frac{1}{2}e^t-2e^{2t}+\frac{3}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & -2e^{2t}+2e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

(3)$(sI_3-A)^{-1}$ を計算すれば

$$(sI_3-A)^{-1} = \frac{1}{(s-3)^3}\begin{bmatrix} (s-3)^2 & s-3 & 1 \\ 0 & (s-3)^2 & s-3 \\ 0 & 0 & (s-3)^2 \end{bmatrix}$$

であるから、各要素をラプラス逆変換すれば

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 2te^{3t} + \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

2. $(sI_2 - A)^{-1}$ を計算すれば

$$(sI_2 - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 4 & s+5 \end{bmatrix}$$

であるから、各要素をラプラス逆変換すれば

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-3t} & -e^{-t} + e^{-3t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-3t} & 2e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

を得る。

解 $x(t)$ は (4.18) 式を用いて

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau b$$

より

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3} + 2e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

を得る。

5章：伝達関数表現

1. この場合、(5.19) 式は正方行列であるから、(3.7) 式より

$$\det P(s) = \det \begin{bmatrix} -(sI_n - A) & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^n \det(sI_n - A) C (sI_n - A)^{-1} B \\
&= (-1)^n C \mathrm{adj}(sI_n - A) B
\end{aligned}
$$

となるので、$P(s)$ のランクを $n+1$ 未満にする s は定義 5.1 の零点と一致する。なお、直達項 D がある場合も同様である。

2. 初期値を 0 として両辺をラプラス変換すれば、たたみ込み積分のラプラス変換を用いて

$$
(s+2)Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} U(s)
$$

を得る。これより伝達関数は

$$
G(s) = \frac{s+1}{(s+2)\{(s+1)^2+4\}}
$$

となる。極は $\{-2, -1 \pm j2\}$ である。また、零点は $\{-1\}$ である。

3. 図 A.1 に示すように、$H_2(s)$ のフィードバックループの引き出し点を $G_3(s)$ の前に移動する。つぎに、$H_1(s)$ のフィードバック結合と $H_2(s)G_3(s)$ のフィードバック結合を変換すれば、後は容易に計算できる。この場合も、例題 5.2 と同様に、伝達関数の積の順序の入れ替えは自由である。

6 章：状態空間の性質

1. ① $\lambda = a_1$ ② $\lambda = a_2$ ③ $\lambda = a_1$ ④ $b_1 \neq 0$ ⑤ $\lambda = a_2$ ⑥ $b_2 \neq 0$ ⑦ $b_1 \neq 0$ ⑧ $b_2 \neq 0$ ⑨ $\lambda = a_1$ ⑩ $\lambda = a_2$ ⑪ $c_1 \neq 0$ ⑫ $c_2 \neq 0$ ⑬ $b_1 = 0$ ⑭ $b_2 = 0$ ⑮ $c_1 = 0$ ⑯ $c_2 = 0$ ⑰ $\lambda = a$ ⑱ $b_1 \neq 0$ ⑲ $b_2 \neq 0$ ⑳ $c_1 \neq 0$ ㉑ $c_2 \neq 0$ ㉒ $b_1 \neq 0$ ㉓ $b_2 \neq 0$ ㉔ $c_1 \neq 0$ ㉕ $c_2 \neq 0$ ㉖ 実数 ㉗ 直線 ㉘ 直線 ㉙ 無数 ㉚ 無数

2. (1) 可制御性行列は

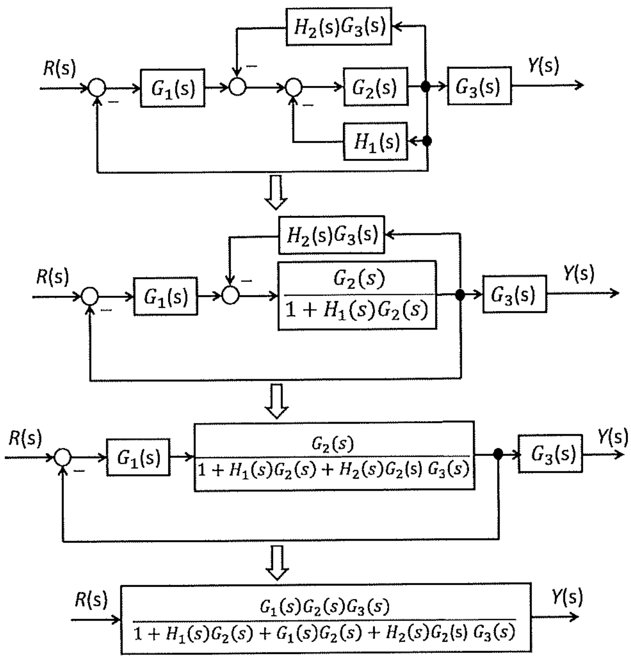

図 A.1 ブロック線図の等価変換

$$U_c = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

となり、$\det U_c = 0$ であり

$$\mathrm{rank} U_c = 2 < 3$$

であるから、不可制御である。

(2) 可制御性行列は

$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

となり、$\det U_c = -1$ であり

$$\mathrm{rank} U_c = 3$$

であるから、可制御である。

3. (1) 可観測性行列は

$$U_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、$\det U_o = 0$ であり

$$\mathrm{rank} U_o = 2 < 3$$

であるから、不可観測 である。

(2) 可観測性行列は

$$U_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

となり、$\det U_o = -1$ であり

$$\mathrm{rank} U_c = 3$$

であるから、可観測である。

4. 行列 A の特性方程式は $det(sI - A) = s^3 + s^2 - 7s - 15$ である。これより

$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 \\ -1 & 5 & 22 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_c = U_c W = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_c^{-1} = \frac{1}{101} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & 12 & 12 \\ -6 & -43 & 58 \end{bmatrix}$$

となる。可制御標準形 A_c, B_c, C_c は

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad, C_c = [19 \quad 10 \quad 0]$$

である。

5. 行列 A の特性方程式は $det(sI - A) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$ である。これより

$$U_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_o = W U_o = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_o^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 & -2 \\ 2/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。可観測標準形 A_o, B_o, C_o は

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad , B_o = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , C_o = [0 \quad 0 \quad 1]$$

である。

7章：周波数応答

1. ステップ応答のラプラス変換は

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + 4s + K}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2+4s+K}$$

であるから、$s^2 + 4s + K = 0$ が複素解をもてば振動的になる。したがって、$4^2 - 4K < 0$ すなわち、$K > 4$ であれば振動的である。

$K = 20$ を代入すれば

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2+4s+20} = \frac{1}{s} - \frac{(s+2) + \frac{1}{2}4}{(s+2)^2 + 4^2}$$

となる。これを逆変換すれば

$$y(t) = 1 - e^{-2t}\left(\cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t\right)$$

となる。

2. インパルス応答は次で与えられる。

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s^2} - \frac{35}{s} + \frac{35}{s + \frac{1}{3.5}}\right]$$

$$1\ 0t - 35 + 35e^{-\frac{t}{3.5}}$$

ステップ応答は次で与えられる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s^3} - \frac{35}{s^2} + \frac{122.5}{s} - \frac{122.5}{s + \frac{1}{3.5}}\right]$$

$$= 5t^2 - 35t + 122.5 - 122.5e^{-\frac{t}{3.5}}$$

$G(j\omega)$ のゲインと位相は次で与えられる。

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\omega^2\sqrt{1+(3.5\omega)^2}},\ \angle G(j\omega) = -180 - \tan^{-1}(3.5\omega)\ \text{[deg]}$$

3. (1) $G(j\omega)$ のゲインと位相は次で与えられる。

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2+\omega^2(1-\omega^2)^2}}$$
$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega(1-\omega^2)}{1-2\omega^2}\ \text{[deg]}$$

(2) 位相が-180[deg] となるとき、周波数伝達関数の虚数部が 0 となる。したがって、虚数部 $\omega(1-\omega^2)=0$ より、$\omega_a = 1$[rad/s] である。このときのゲインは $|G(j\omega_a)| = 1$ である。ゲインが最大となる角周波数は、$(1-2\omega^2)^2+\omega^2(1-\omega^2)^2$ の極小点を求めればよい。この式を ω で微分すれば、$2\omega(3\omega^4+4\omega^2-3)$ となる。$X=\omega^2$ として $3X^2+4X-3=0$ を解けば、$X \approx 0.535$ となる。これより $\omega_m \approx 0.732$ となる。このときのゲインは $|G(j\omega_m)| \approx 2.88$ である。

(3) ベクトル軌跡は図 A.2、ボード線図は図 A.3 に示す。

8 章：制御系の安定性

1. ① 固有値 ② -1 ③ $x_1(t) = x_1(0)e^{-t}$ ④ $-x_2(t) + x_1(0)e^{t}$ ⑤ $\frac{e^t-e^{-t}}{2}x_1(0) + e^{-t}x_2(0)$ ⑥ $x_1(0) \neq 0$

2. (1) フルビッツ行列の主座小行列式は

$$\Delta_1 = K+1,\ \Delta_2 = 5K+1,\ \Delta_3 = 4\Delta_2$$

となる。Δ_1 より $K > -1$ でなければならない。Δ_2 とより $K > -0.2$ でなければならない。したがって、安定条件は、$K > -1$ の条件と同時に成

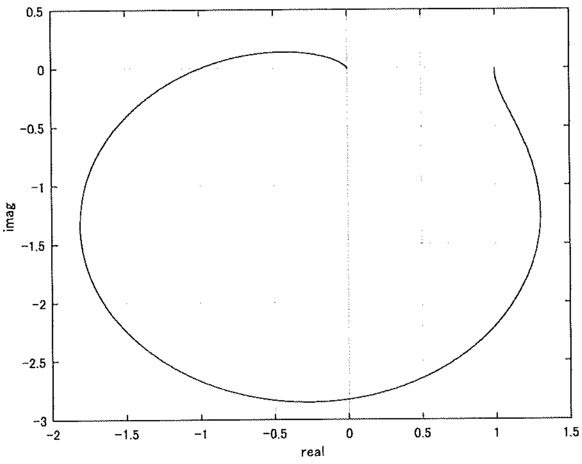

図 A.2　ベクトル軌跡

り立つ必要があるため、$K > -0.2$ でなければならない。

(2) フルビッツ行列の主座小行列式は

$$\Delta_1 = K,\ \ \Delta_2 = -K-6,\ \ \Delta_3 = -13K^2-24K-36,\ \ \Delta_4 = 10\Delta_3$$

となる。Δ_1 より $K > 0$ でなければならないが、Δ_2 より $K < -6$ でなければならない。また、Δ_3 はどのように K を選んでも負の値をとる。したがって、このシステムは不安定である。

(3) フルビッツ行列の主座小行列式は

$$\Delta_1 = 3K,\ \ \Delta_2 = 3K^2+6K-4,\ \ \Delta_3 = 4\Delta_2$$

となる。Δ_1 より $K > 0$ でなければならない。Δ_2 は $3K^2+6K-4=0$ を解いて、$K < -2.53$ あるいは $K > 0.53$ で正の値をとる。安定条件は、$K > 0$ の条件と同時に成り立つ必要があるため、$K > 0.53$ なければならない。

3. (1) 特性多項式は $1+G(s)=0$ より、$s^3+505s^2+2500s+2500K=0$

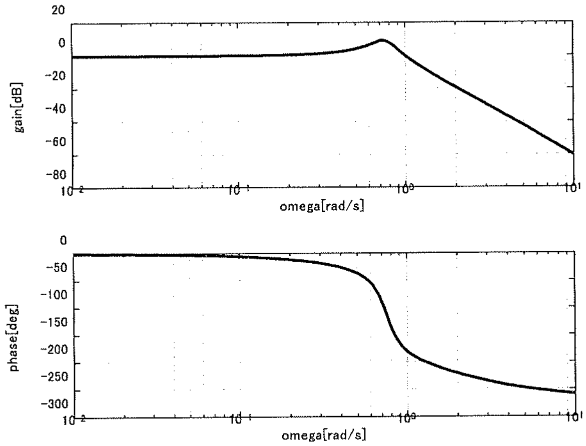

図 A.3　ボード線図

となる。特性方程式の係数およびラウス列 $r_{01} = 1, r_{11} = 505, r_{21} = 2500(505 - K)/505, r_{31} = 2500K$ から、閉ループ系の安定条件は $0 < K < 505$ となる。

一方、フルビッツ行列の主座小行列式は

$$\Delta_1 = 505,\ \ \Delta_2 = 2500(505 - K),\ \ \Delta_3 = 2500^2 K(505 - k)$$

となる。よって閉ループ系の安定条件は $0 < K < 505$ と同じ結果が得られる。

(2) ゲイン交差角周波数 ω_c は $|G(j\omega_c)| = 1$ で定義されるため、代数方程式

$$(0.0004)^2\omega_c^6 + 0.040004\omega_c^4 + \omega_c^2 = 1$$

の解がゲイン交差角周波数 ω_c となる。$P = \omega_c^2$ とおき、3 次方程式に帰着させて解けば、$\omega_c \approx 0.981$ を得る。これより、位相余裕 θ は $\theta = 180 + \angle G(j\omega_c) \approx 180 - 101 = 79$[deg] となる、一方、ベクトル

軌跡が実軸と交わる周波数(位相が -180[deg] となる周波数)ω_A は、$G(j\omega)$ の虚数部が零となる周波数であるから、$1-4\times10^{-4}\omega_A^2=0$ を解けばよい。これより、$\omega_A=50$ となる。したがって、ゲイン余裕は

$$20\log_{10}\frac{1}{|G(j\omega_A)|}\approx 54.1[\mathrm{dB}]$$

となる。

4. ゲイン交差角周波数を ω_c とすれば、$180+\angle G(j\omega_c)=30$[deg] となればよい。これより、$\angle G(j\omega_c)=-150$[deg]。従って

$$\angle G(j\omega_c)=-90-\tan^{-1}\left[\frac{0.7\omega_c}{1-0.1\omega_c^2}\right]=-150[\mathrm{deg}]$$

これは

$$\tan^{-1}\left[\frac{0.7\omega_c}{1-0.1\omega_c^2}\right]=60[\mathrm{deg}]$$

となるから、ω_c は

$$\frac{0.7\omega_c}{1-0.1\omega_c^2}=\sqrt{3}$$

を満たせばよい。これより、$\omega_c=\sqrt{3}$ となる。$|G(j\omega_c)|=1$ でなければならないから

$$|G(j\omega_c)|=\frac{K}{\sqrt{3}\sqrt{1+0.04\times3}\sqrt{1+0.25\times3}}=1$$

を解き、$K\approx 2.42$ を得る。

5. (1) 特性方程式 $6s^3+11s^2+6s+1+K=0$ から、ラウス数列 $r_{0\,1},\ldots,r_{3\,1}$ を求めると

$$r_{0\,1}=6, r_{1\,1}=11, r_{2\,1}=6(10-K), r_{3\,1}=K+1$$

となる。これより、安定なゲインは $-1<K<10$ である。

(2) ベクトル軌跡が実軸と交わる周波数（位相が -180[deg] となる周波数）ω_A は、$G(j\omega)$ の虚数部が零となる周波数であるから、$1-\omega_A^2=0$ を解けばよい。これより、$\omega_A=1$。ゲイン余裕が 20[dB] であるから

$$20\log_{10}\frac{1}{|G(j\omega_A)|}=20$$

従って

$$|G(j\omega_A)|=\frac{1}{10}$$

となるように K を決めればよい。$|G(j\omega_A)| = K/10$ であるから、$K=1$ とすればよい。

6. 開ループ極は 0 と -1（重複極）である。原点に極をもつため、ナイキスト閉曲線は図 8.6(a) のように原点を半径 ε の半円で迂回している。このナイキスト閉曲線に含まれる不安定な開ループ極はない。すなわち $P=0$ である。原点を迂回する s を $s=\varepsilon e^{j\theta}, -90[\mathrm{deg}]\le\theta\le 90[\mathrm{deg}]$ とすれば、この時の $G(s)$ は $\varepsilon\ll 1$ であるから

$$G(s)=\frac{1}{\varepsilon}e^{-j\theta}$$

と近似できる。これに対応するナイキスト軌跡が図 8.6(a) の半径無限大の半円である。$s=j\omega, \omega\neq 0$ となるときと合わせて図 8.6(b) のナイキスト軌跡が得られる。$G(j\omega)$ のゲインと位相は

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\omega(1+\omega^2)},\ \angle G(j\omega)=-90-2\tan^{-1}\omega$$

となることから、$|G(j\omega_c)|=1$ となるゲイン交差角周波数 ω_c は $\omega_c<1$ であるから、この時の位相 $\angle G(j\omega_c)$ は-180[deg] には達していない（位相余裕がある）。位相が -180[deg] となる ω_A は $\omega_A=1$[rad/s] であることから、ベクトル軌跡 $G(j\omega)$ は図 8.6(b) 図のような軌跡を描き、$-1+j0$ を左側にみて原点に収束することがわかる。この軌跡は $-1+j0$ を回らない

ため、$R=0$ となり、図 8.11 の閉ループシステムは安定であることが示される。

7. (1) $x(t)=r(t)\cos\theta(t),\ y(t)=r(t)\sin\theta(t)$ を微分すれば、自律系は簡単な計算より

$$\dot{r}(t)\cos\theta(t)-r(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t)=-r(t)\sin\theta(t)-r^3(t)\cos\theta(t)\quad \text{(A.1)}$$
$$\dot{r}(t)\sin\theta(t)+r(t)\cos\theta(t)\dot{\theta}(t)=r(t)\cos\theta(t)-r^3(t)\sin\theta(t)\quad \text{(A.2)}$$

となる。ここで、(A.1) 式に $\cos\theta(t)$ をかけ、(A.2) 式に $\sin\theta(t)$ をかけて、両式の辺々をたせば

$$\dot{r}(t)=-r^3(t)$$

を得る。また、(A.1) 式に $\sin\theta(t)$ をかけ、(A.2) 式に $-\cos\theta(t)$ をかけて、両式の辺々をたせば

$$\dot{\theta}(t)=1$$

を得る。

(2) $r(t)$ の式を書きなおすと

$$\frac{\dot{r}(t)}{r^3(t)}=-1$$

となる。変数分離系であるから、容易に計算でき

$$\frac{1}{2r^2(t)}=t+c$$

となる。c は積分定数であるから、$t=0$ で $r(0)=r_0$ とすれば

$$r(t)=\frac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2t}},\ \forall t>-\frac{1}{2r_0^2}$$

となる。$\theta(t)$ は簡単に

$$\theta(t) = \theta_0 + t$$

となる。これより、$t > -1/(2r_0^2)$ に対して $r(t) = 0\ (t \to \infty)$ となるから、$(x, y) = (0, 0)\ (t \to \infty)$。したがって、原点は漸近安定である。

(3) リアプノフ関数を $V(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t)$ とすれば、

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = -2\left\{x^2(t) + y^2(t)\right\}^2 < 0$$

となり、原点は漸近安定であることが示される。

9章：状態フィードバック制御

1. ① 測定 ② 極 ③ 極配置 ④ 不安定 ⑤ 安定 ⑥ 過渡特性 ⑦ 極配置 ⑧ 特性 ⑨ $k_1 - 1$ ⑩ $k_2 - 1$ ⑪ $k_2 - 1$ ⑫ $1 - k_2$ ⑬ 0 ⑭ 0 ⑮ 1 ⑯ 不可制御 ⑰ 可制御

2. 対 (A, B) が可制御であるので、任意の複素数 s に対して

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - sI_n & B \end{bmatrix} = n$$

である。それゆえ、任意の複素数 s および任意のフィードバックゲイン行列 K に対して

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - BK - sI_n & B \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - sI_n & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ -K & I_m \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - sI_n & B \end{bmatrix} = n \end{aligned}$$

であるので、対 $(A - BK, B)$ は可制御である。

3. 対 (A, B) の可制御性を確認するため、可制御性行列 U_c をつくりその階数が状態変数の個数と一致するかを確認する。つぎに、行列 $A - BK$ の固有値が希望の値 $\lambda_i\ (i = 1, \cdots, n)$ になるようなフィードバックゲイン行列 K を求める。

(a) 可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank} U_c = 2$ であるため対 (A, B) は可制御なので、行列 $A - BK$ の固有値が $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ となる K は存在する。$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ とすると

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & -1 - k_2 \\ 2 - 2k_1 & -2k_2 \end{bmatrix}$$

なので、行列 $A - BK$ の特性多項式は

$$\det(sI_2 - A + BK) = \det \begin{bmatrix} s + k_1 - 1 & 1 + k_2 \\ 2k_1 - 2 & s + 2k_2 \end{bmatrix}$$
$$= s^2 + (k_1 + 2k_2 - 1)\, s + 2(1 - k_1)$$

である。一方、希望の極を有する特性多項式は

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

であるので、二つの多項式の係数を比較すると

$$k_1 + 2k_2 - 1 = 3, \quad 2(1 - k_1) = 2$$

を同時に満足する $k_i (i = 1, 2)$ は、$k_1 = 0, k_2 = 2$ となるので、求めるべき K は $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$ である。

(b) 可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank} U_c = 1$ であるので対 (A, B) は不可制御である。また、制御

対象の極は

$$\det(sI_2 - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -3 & s-2 \end{bmatrix} = (s-3)(s+1) = 0$$

の解より $s = -1,\ 3$ で $\lambda_1 = -10,\ \lambda_2 = -2$ とは異なるので、題意を満たす K は存在しない。

(c) 行列 $A,\ B$ の構造は可制御標準形であり明らかに対 (A, B) は可制御なので、$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = -5$ とする K は存在する。(9.20) 式において、$T_c = I_3,\ \bar{a}_{21} = 1,\ \bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ そして希望の極を有する特性多項式

$$\prod_{i=1}^{3}(s - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{3}(s + i + 2) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

より、$d_1 = 60, D_2 = \begin{bmatrix} 47 & 12 \end{bmatrix}$ となる。それゆえ (9.20) 式より、求めるべき K は

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} d_1 - \bar{a}_{21} & D_2 - \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 60-1 & 47-2 & 12-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 45 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

4. 制御対象のパラメータ行列 A, B は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、行列 $A - BK$ の希望の固有値は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ である。

(a) 可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank}U_c = 3$ であるので対 (A, B) は可制御である。

(b) 行列 $N_i\,(i = 1, 2, 3)$ を求めると

$$\begin{aligned} N_i &= (A - \lambda_i I_3)^{-1} B g_i \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 \\ -2 & -3-\lambda_i & -1 \\ -1 & 0 & -3-\lambda_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{i1} \\ g_{i2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} (3+\lambda_i)^2 & 3+\lambda_i & -1 \\ -(5+2\lambda_i) & \lambda_i(3+\lambda_i) & -\lambda_i \\ -(3+\lambda_i) & -1 & (1+\lambda_i)(2+\lambda_i) \end{bmatrix}}{1 - (\lambda_i+1)(\lambda_i+2)(\lambda_i+3)} \begin{bmatrix} 0 \\ g_{i1} \\ g_{i2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} (3+\lambda_i) g_{i1} - g_{i2} \\ \lambda_i(3+\lambda_i) g_{i1} - \lambda_i g_{i2} \\ -g_{i1} + (1+\lambda_i)(2+\lambda_i) g_{i2} \end{bmatrix}}{1 - (\lambda_i+1)(\lambda_i+2)(\lambda_i+3)} \end{aligned}$$

であるので、$\lambda_i, g_i\,(i = 1, 2, 3)$ の値を代入して

$$N_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

となる。このとき

$$\det N = \det \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = -2\alpha$$

なので、det$N=0$ とする α は $\alpha=0$ のみである。それゆえ、題意より求めるべき α_1 は $\alpha_1=0$ である。

(c) 小問 (b) の結果より、$\alpha \neq \alpha_1$ として、行列 N の逆行列を計算すると

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

なので、求めるべき K は

$$\begin{aligned} K &= GN^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

5. 制御対象のパラメータ行列 A, B は

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり、二次形式評価関数 J の重み行列は

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

である。状態方程式の 1 行目と 2 行目を入れ替えれば、可制御標準形になることから、対 (A, B) は可制御である。制御対象は二次系であるので、ここでは直接解く方法を用いてリカッチ方程式 (9.28) 式の解を求めてみよう。リカッチ方程式の解 P を

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと (9.28) 式より、リカッチ方程式は

$$
\begin{aligned}
&A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3p_{11} + p_{12} - 3p_{11} + p_{12} - p_{11}^2 + 5 & -3p_{12} + p_{22} - 2p_{11} - p_{11}p_{12} \\ * & -2p_{12} - 2p_{12} - p_{12}^2 + 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\left(p_{11}^2 + 6p_{11} - 5\right) + 2p_{12} & p_{22} - 2p_{11} - p_{11}p_{12} - 3p_{12} \\ * & -\left(p_{12}^2 + 4p_{12} - 5\right) \end{bmatrix} = O_{2\times 2}
\end{aligned}
$$

となる。2-2 要素より p_{12} の二次方程式を解くと

$$p_{12}^2 + 4p_{12} - 5 = (p_{12} + 5)(p_{12} - 1) = 0$$

より、$p_{12} = -5,\ 1$ である。この p_{12} の値を 1-1 要素に代入して p_{11} の二次方程式を解くと

(a) $p_{12} = -5$ のとき

$$p_{11}^2 + 6p_{11} + 5 = (p_{11} + 5)(p_{11} + 1) = 0$$

より $p_{11} > 0$ の解は存在しない。

(b) $p_{12} = 1$ のとき

$$p_{11}^2 + 6p_{11} - 7 = (p_{11} + 7)(p_{11} - 1) = 0$$

より $p_{11} > 0$ の解は $p_{11} = 1$ である。

それゆえ、$p_{11} = 1, p_{12} = 1$ として 1-2 要素に代入すると、p_{22} は

$$p_{22} = 2p_{11} + p_{11}p_{12} + 3p_{12} = 2 + 1 + 3 = 6$$

である。このとき

$$\det P = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 5 > 0$$

であるから

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

はリカッチ方程式の正定唯一解である。求めるべき制御入力 $u(t)$ は (9.27) 式より

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} x(t) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

として得られる。

6. 制御対象のパラメータ行列 A, B, C および状態変数 $x(t)$ の初期値 $x(0)$ は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

であり、状態フィードバック制御 $u(t) = -Kx(t)$ を施して配置される安定な閉ループ極は $-\lambda_i (i = 1, 2)$ である。

(a) 行列 A, B の構造は可制御標準形であり、明らかに対 (A, B) は可制御である。

(b) 安定な閉ループ極 $-\lambda_i (i = 1, 2)$ を有する特性多項式は

$$(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

より (9.19) 式における d_1, D_2 は各々 $d_1 = \lambda_1\lambda_2, D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ であ

る。行列 $A - BK$ の極が $-\lambda_i (i = 1, 2)$ を有するときのフィードバックゲイン行列 K は (9.20) 式より求めることができる。その K を施したときの $A - BK$ は (9.17) 式より

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 & -D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix}$$

となる。

(c) リアプノフ方程式

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P + C^T C = O_{2\times 2}$$

の解 P を

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}$$

とし、小問 (b) の結果を用いると

$$\begin{aligned} & P(A - BK) + (A - BK)^T P + C^T C \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \\ 1 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\lambda_1 \lambda_2 p_{12} & p_{11} - (\lambda_1 + \lambda_2) p_{12} - \lambda_1 \lambda_2 p_{22} \\ * & 2p_{12} - 2(\lambda_1 + \lambda_2) p_{22} + 1 \end{bmatrix} = O_{2\times 2} \end{aligned}$$

となる。任意の $\lambda_i > 0 (i = 1, 2)$ でこの方程式が解けるためには 1-1 要素より $p_{12} = 0$ でなければならない。このとき、2-2 要素より

$$p_{22} = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

であり、また 1-2 要素より

$$p_{11} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

なので、解 P は

$$P = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。それゆえ、J の値は

$$\begin{aligned} J &= x(0)^T P x(0) = \frac{\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ &= \frac{x_1(0)^2}{2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)} + \frac{x_2(0)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

となる。

(d) $x_1(0) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\lambda_1 \to \infty \\ \lambda_2 \to \infty}} J &= \lim_{\substack{\lambda_1 \to \infty \\ \lambda_2 \to \infty}} \frac{x_1(0)^2}{2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)} + \lim_{\substack{\lambda_1 \to \infty \\ \lambda_2 \to \infty}} \frac{x_2(0)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ &= \lim_{\substack{\lambda_1 \to \infty \\ \lambda_2 \to \infty}} \frac{x_1(0)^2}{2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)} = \infty \end{aligned}$$

であり、$x_1(0) = 0$ のとき

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to \infty \\ \lambda_2 \to \infty}} J = \lim_{\substack{\lambda_1 \to \infty \\ \lambda_2 \to \infty}} \frac{x_2(0)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} = 0$$

となる。それゆえ、求めるべき $J \to \infty$ になる初期値 $x(0)$ は $x_2(0) \neq 0$ および $x_1(0) \neq 0$ であり、$J \to 0$ になる初期値 $x(0)$ は $x_2(0) \neq 0$ および $x_1(0) = 0$ である。

(e) ① 左半平面 ② 増大 ③ 状態変数の初期値

7. 制御対象が $P_v(s) = P(s) + \Delta P(s)$ へ変動したとき、閉ループ伝達関数は

$$\begin{aligned} W_v(s) &= \frac{P_v(s)C(s)}{1+P_v(s)C(s)} = W(s) + \Delta W(s) \\ &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} + \Delta W(s) \end{aligned}$$

となる。両辺を $W_v(s)$ で割り、整理すると

$$\frac{\Delta W(s)}{W_v(s)} = 1 - \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \frac{1+P_v(s)C(s)}{P_v(s)C(s)} \tag{A.3}$$

となる。同様に $P_v(s) = P(s) + \Delta P(s)$ の両辺を $P_v(s)$ で割ると

$$\frac{\Delta P(s)}{P_v(s)} = 1 - \frac{P(s)}{P_v(s))} \tag{A.4}$$

となる。(A.3) 式と (A.4) 式から制御対象のパラメータ変動に対する閉ループ伝達関数の感度を計算すれば

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W(s)/W_v(s)}{\Delta P(s)/P_v(s)} &= \frac{1 - \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \frac{1+P_v(s)C(s)}{P_v(s)C(s)}}{1 - \frac{P(s)}{P_v(s))}} \\ &= \frac{1 - \frac{P(s)}{P_v(s)} \frac{1+P_v(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}}{\frac{P_v(s)-P(s)}{P_v(s)}} = \frac{1}{1+P(s)C(s)} \end{aligned}$$

となり、(9.49) 式で定義される感度関数が (9.48) 式に一致する。

8. リカッチ方程式の解を

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおく。ただし、$*$ は対称となる要素と同じであることを意味する。

$$\begin{aligned} &\hat{A}^T \hat{P} + \hat{P}\hat{A} - \hat{P}\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}^T\hat{P} + \hat{Q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
-\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ * & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -p_{11}^2 + 2p_{11} - 2p_{12} & p_{12} - p_{22} - p_{11}p_{12} \\ * & -p_{12}^2 + 4 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}
$$

となる。2-2 要素より p_{12} の二次方程式を解くと $p_{12} = \pm 2$ である。この p_{12} の値を 1-1 要素に代入して p_{11} の二次方程式を解くと

(a) $p_{12} = 2$ のとき

$$
p_{11}^2 - 2p_{11} + 4 = 0
$$

を解くと $p_{11} = 1 \pm j\sqrt{3}$ となり、この場合の $\hat{P}$ は正定行列とならない。

(b) $p_{12} = -2$ のとき

$$
p_{11}^2 - 2p_{11} - 4 = 0
$$

を解くと $p_{11} = 1 \pm \sqrt{5}$ であるから、$\hat{P}$ の正定性から $p_{11} = 1 + \sqrt{5}$ となる。

p_{22} は 1-2 要素より

$$
p_{22} = p_{12} - p_{11}p_{12} = 2\sqrt{5}
$$

となる。それゆえ、リカッチ方程式の解 $\hat{P}$ は

$$
\hat{P} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}
$$

として得られる。P が正定行列であることは $\det \hat{P} = 6 + 2\sqrt{5} > 0$ であることから確認できる。制御入力は

$$
u(t) = -(1+\sqrt{5})x(t) + 2\int (r - y(t))dt
$$

で与えられる。このときの閉ループ極は $(-\sqrt{5} \pm j\sqrt{3})/2$ となる。

10章：状態推定器と併合系

1. ① 測定 ② 観測 ③ 測定 ④ 推定 ⑤ 状態推定⑥ 既知 ⑦ $x(0)$ ⑧ 未知 ⑨ 不安定 ⑩ ∞ ⑪ 安定 ⑫ 状態推定 ⑬ 推定誤差 ⑭ ゲイン ⑮ フィードバック ⑯ $A-HC$ ⑰ $A-HC$ ⑱ 未知 ⑲ 不安定 ⑳ 双対 ㉑ (C, A) ㉒ 可観測 ㉓ 同一 ㉔ 最小

2. 対 (C, A) が可観測であるので、任意の複素数 s に対して

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - sI_n \\ C \end{bmatrix} = n$$

である。それゆえ、任意の複素数 s および任意のゲイン行列 H に対して

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - HC - sI_n \\ C \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & -H \\ O_{l\times n} & I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - sI_n \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - sI_n \\ C \end{bmatrix} = n\end{aligned}$$

であるので、対 $(C, A - HC)$ は可観測である。

3. 対 (C, A) の可観測性を確認するため、可観測性行列 U_o をつくりその階数が状態変数の個数と一致するかを確認する。つぎに、行列 $A - HC$ の固有値が希望の値 $\lambda_i\,(i = 1, \cdots, n)$ になるような同一次元状態推定器のゲイン行列 H を求める。

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -8, \lambda_2 = -6$

可観測性行列 U_o は

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank} U_o = 2$ であるため対 (C, A) は可観測なので、行列 $A - HC$ の固有値が $\lambda_1 = -8, \lambda_2 = -6$ となる H は存在する。$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T$ とすると

$$A - HC = \begin{bmatrix} -h_1 & 4 + 2h_1 \\ 1 - h_2 & 5 + 2h_2 \end{bmatrix}$$

なので、行列 $A - HC$ の特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(sI_2 - A + HC) &= \det \begin{bmatrix} s + h_1 & -2h_1 - 4 \\ h_2 - 1 & s - 2h_2 - 5 \end{bmatrix} \\ &= s^2 + (h_1 - 2h_2 - 5)s - 7h_1 + 4h_2 - 4 \end{aligned}$$

である。一方、希望の極を有する特性多項式は

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 8)(s + 6) = s^2 + 14s + 48$$

であるので、二つの多項式の係数を比較すると

$$h_1 - 2h_2 = 19, \quad -7h_1 + 4h_2 = 52$$

を同時に満足する $h_i \, (i = 1, 2)$ は、$h_1 = -18, h_2 = -18.5$ となるので、求めるべき H は $H = -\begin{bmatrix} 18 & 18.5 \end{bmatrix}^T$ である。

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -7, \lambda_2 = -2$

可観測性行列 U_o は

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank}U_o = 1$ であるため対 (C, A) は不可観測なので、行列 $A - HC$ の固有値を任意に配置する H は存在しない。ところで、$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T$ とすると

$$A - HC = \begin{bmatrix} 1 - 3h_1 & 4 - 4h_1 \\ -3h_2 & -2 - 4h_2 \end{bmatrix}$$

なので、行列 $A - HC$ の特性多項式は

$$\det(sI_2 - A + HC) = \det \begin{bmatrix} s - 1 + 3h_1 & -4 + 4h_1 \\ 3h_2 & s + 2 + 4h_2 \end{bmatrix}$$
$$= s^2 + (3h_1 + 4h_2 + 1)\,s + 6h_1 + 8h_2 - 2 = s^2 + \gamma s + 2\gamma - 4$$
$$= (s + 2)(s + \gamma - 2)$$

である。ただし、$\gamma = 3h_1 + 4h_2 + 1$ である。それゆえ、ゲイン行列 H によらず一つの固有値は -2 であるので、もう一つの固有値 -7 が配置されるように H を決定すればよい。すなわち $\gamma - 2 = 7$ を満足すればよく、それは

$$3h_1 + 4h_2 = 8$$

を解いて

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \alpha,\ \forall \alpha$$

となる。なお、対 (C, A) が不可観測であるからといっていつも状態推定器が設計できないと勘違いしないように注意されたい。本問題のように、希望の極が制御対象の極と一致しており、なおかつ安定である場合には不可観測であっても、題意に即した状態推定器が設計できることがある。

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -7, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -5$

行列 A, C の構造は可観測標準形であり明らかに対 (C, A) は可観測なので、行列 $A - HC$ の固有値が $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -5$ となる H は存在する。$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}^T$ とすると

$$A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_1 \\ 1 & 0 & 1 - h_2 \\ 0 & 1 & -h_3 \end{bmatrix}$$

なので、行列 $A - HC$ の特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(sI_3 - A + HC) &= \det \begin{bmatrix} s & 0 & h_1 \\ -1 & s & -1 + h_2 \\ 0 & -1 & s + h_3 \end{bmatrix} \\ &= s^3 + h_3 s^2 + (h_2 - 1)\, s + h_1 \end{aligned}$$

である。一方、希望の極を有する特性多項式は

$$\prod_{i=1}^{3} (s - \lambda_i) = s^3 + 18s^2 + 107s + 210$$

であるので、二つの多項式の係数を比較すると $h_1 = 210, h_2 = 108, h_3 = 18$ となるので、求めるべき H は $H = \begin{bmatrix} 210 & 108 & 18 \end{bmatrix}^T$ である。

4. 制御対象のパラメータ行列 A, C は問題 3. と一致しているので、紙面の関係もあって対 (C, A) の可観測性の確認は問題 3. の結果を用いることとする。つぎに、行列 $A - HC$ の固有値の一部が λ_1 もしくは $\lambda_i\, (i = 1, 2)$ となるようなゲイン行列 H を求めて固有方程式から F を求め、最小次元状態推定器の構成条件からパラメータ行列 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, G$ を設計する。

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -8$

問題 3.(a) の結果より対 (C, A) は可観測である。それゆえ、設計手順に従ってパラメータ行列 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, G$ を求める。

i. $n - l$=1 より $\hat{A} = \lambda_1 = -8$ である。

ii. $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T$ とすると問題 3.(a) の結果より

$$\det(sI_2 - A + HC) = s^2 + (h_1 - 2h_2 - 5)\, s - 7h_1 + 4h_2 - 4$$

である。希望の極を有する特性多項式は、任意の α のもと

$$(s - \lambda_1)(s + \alpha) = (s + 8)(s + \alpha) = s^2 + (8 + \alpha)\, s + 8\alpha$$

であるので、二つの多項式の係数を比較して

$$h_1 - 2h_2 = 13 + \alpha, \quad -7h_1 + 4h_2 = 4 + 8\alpha$$

を同時に満足する $h_i\,(i = 1, 2)$ は

$$h_1 = -2(\alpha + 3), \quad h_2 = -\frac{1}{2}(3\alpha + 19)$$

となる。このとき

$$A - HC = \begin{bmatrix} 2(\alpha + 3) & -4(\alpha + 2) \\ \frac{3}{2}(\alpha + 7) & -3\alpha - 14 \end{bmatrix}$$

である。

iii. 固有方程式 (10.20) 式において $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ とすると、任意の α のもとで

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(\alpha + 3) & -4(\alpha + 2) \\ \frac{3}{2}(\alpha + 7) & -3\alpha - 14 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = O_{1\times 2}$$

より

$$\frac{\alpha+7}{2}\left(4f_1+3f_2\right)=0, \quad (\alpha+2)\left(4f_1+3f_2\right)=0$$

を同時に満足する F は

$$F=\beta\begin{bmatrix}-3 & 4\end{bmatrix},\ \forall\beta\neq 0$$

である。

iv. (10.9) 式、(10.21) 式、(10.19) 式より 、パラメータ行列 $\hat{B},\hat{C},\hat{D},G$ を求めると任意の $\beta\neq 0$ に対して

$$\hat{B}=FB=\beta\begin{bmatrix}-3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\beta$$

である。また

$$\begin{bmatrix}\hat{D} & \hat{C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\F\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\-3\beta & 4\beta\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2\beta}\begin{bmatrix}4\beta & 2\\3\beta & 1\end{bmatrix}$$

より

$$\hat{C}=-\frac{1}{2\beta}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \quad \hat{D}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

さらに

$$G=FH=-\beta\begin{bmatrix}-3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\alpha+6\\\frac{3}{2}\alpha+\frac{19}{2}\end{bmatrix}=-20\beta$$

である。

(b) $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}, \quad \lambda_1=-2$

i. $n-l$=1 より $\hat{A}=\lambda_1=-2$ である。

ii. 問題 3.(b) の結果より対 (C, A) は不可観測である。ところで、問題 3.(b) の結果より $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T$ として

$$\det(sI_2 - A + HC) = s^2 + \gamma s + 2\gamma - 4$$
$$= (s+2)(s+\gamma-2), \quad \gamma = 3h_1 + 4h_2 + 1$$

である。それゆえ、$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T (\gamma - 1), \forall\gamma$ であるので

$$A - HC = \begin{bmatrix} 3\gamma - 2 & 4\gamma \\ -3(\gamma-1) & 2(1-2\gamma) \end{bmatrix}$$

である。

iii. 任意の γ に対して $\lambda(A - HC) = -2$ であるので、固有方程式 (10.20) 式において $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\gamma - 2 & 4\gamma \\ -3(\gamma-1) & 2(1-2\gamma) \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = O_{1\times 2}$$

より $\gamma f_1 + (1-\gamma) f_2 = 0$ を満足する F は

$$F = \beta \begin{bmatrix} \gamma - 1 & \gamma \end{bmatrix}, \forall\gamma,\ \beta \neq 0$$

である。ただし

$$\det \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} = \beta(4-\gamma) \neq 0$$

を満たす $\gamma \neq 4$ を設定する。

iv. (10.9) 式、(10.21) 式、(10.19) 式より、パラメータ行列 $\hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, G$ を求めると任意の $\gamma \neq 4$ および任意の $\beta \neq 0$ に対して

$$\hat{B} = FB = \beta \begin{bmatrix} \gamma - 1 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta\gamma$$

である。また

$$\begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \beta(\gamma-1) & \beta\gamma \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\beta(4-\gamma)} \begin{bmatrix} \beta\gamma & -4 \\ \beta(1-\gamma) & 3 \end{bmatrix}$$

より

$$\hat{C} = \frac{1}{\beta(4-\gamma)} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \frac{1}{4-\gamma} \begin{bmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{bmatrix}$$

さらに

$$G = FH = \beta \begin{bmatrix} \gamma-1 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (\gamma-1) = \beta(\gamma-1)$$

である。

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -7, \lambda_2 = -6$

問題 3.(c) の結果より対 (C, A) は可観測である。それゆえ、設計手順に従ってパラメータ行列 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, G$ を求める。

i. $n - l$=2 より

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

とする。

ii. $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}^T$ とすると問題 3.(c) の結果より

$$\det(sI_3 - A + HC) = s^3 + h_3 s^2 + (h_2 - 1)s + h_1$$

である。希望の極を有する特性多項式は、任意の α のもと

$$\begin{aligned}(s+\alpha)\prod_{i=1}^{2}(s-\lambda_i) &= (s+\alpha)(s+7)(s+6)\\ &= s^3+(13+\alpha)s^2+(42+13\alpha)s+42\alpha\end{aligned}$$

であるので、二つの多項式の係数を比較して $h_j\,(j=1,2,3)$ は

$$h_1=42\alpha,\quad h_2=43+13\alpha,\quad h_3=13+\alpha$$

となる。このとき

$$A-HC=\begin{bmatrix}0 & 0 & -42\alpha\\ 1 & 0 & -42-13\alpha\\ 0 & 1 & -13-\alpha\end{bmatrix}$$

である。

iii. 固有方程式 (10.20) 式において、固有値 $\lambda_i\,(i=1,2)$ に対する固有ベクトルを $\begin{bmatrix}f_{i1} & f_{i2} & f_{i3}\end{bmatrix}$ $(i=1,2)$ とすると、任意の α のもとで

$$\begin{bmatrix}f_{i1} & f_{i2} & f_{i3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda_i & 0 & -42\alpha\\ 1 & -\lambda_i & -42-13\alpha\\ 0 & 1 & -\lambda_i-13-\alpha\end{bmatrix}=O_{1\times3},\ i=1,2$$

より $f_{i2}=\lambda_i f_{i1}$, $f_{i3}=\lambda_i^2 f_{i1}$ を第 3 列目の等式に代入して

$$\begin{aligned}&42\alpha f_{i1}+(42+13\alpha)f_{i2}+(\lambda_i+13+\alpha)f_{i3}\\ &=\left\{42\alpha+(42+13\alpha)\lambda_i+(\lambda_i+13+\alpha)\lambda_i^2\right\}f_{i1}\\ &=\left\{\lambda_i^3+(13+\alpha)\lambda_i^2+(42+13\alpha)\lambda_i+42\alpha\right\}f_{i1}\\ &=0\end{aligned}$$

であるが、任意の α に対し、$\lambda_1=-7,\lambda_2=-6$ にて

$$\lambda_i^3 + (13+\alpha)\,\lambda_i^2 + (42+13\alpha)\,\lambda_i + 42\alpha = 0$$

が満足されるので、F は

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix},\ \forall f_{i1} \neq 0,\ i = 1, 2$$

である。

iv. (10.9) 式、(10.21) 式、(10.19) 式より、パラメータ行列 $\hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, G$ を求めると任意の $f_{i1} \neq 0\,(i = 1, 2)$ に対して

$$\hat{B} = FB = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix}$$

である。また

$$\begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ f_{11} & \lambda_1 f_{11} & \lambda_1^2 f_{11} \\ f_{21} & \lambda_2 f_{21} & \lambda_2^2 f_{21} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1\lambda_2 & \frac{\lambda_2}{f_{11}(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{\lambda_1}{f_{21}(\lambda_1-\lambda_2)} \\ -\lambda_1-\lambda_2 & \frac{1}{f_{11}(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{1}{f_{21}(\lambda_2-\lambda_1)} \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

より $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -6$ を代入すると

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{f_{11}} & \frac{7}{f_{21}} \\ -\frac{1}{f_{11}} & \frac{1}{f_{21}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 42 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに

$$G = FH = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42\alpha \\ 43+13\alpha \\ 13+\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11}\left\{\left(43+13\lambda_1\right)\lambda_1+\left(6+\lambda_1\right)\left(7+\lambda_1\right)\alpha\right\} \\ f_{21}\left\{\left(43+13\lambda_2\right)\lambda_2+\left(6+\lambda_2\right)\left(7+\lambda_2\right)\alpha\right\} \end{bmatrix}$$

より $\lambda_1=-7, \lambda_2=-6$ を代入すると

$$G=\begin{bmatrix} 336f_{11} \\ 210f_{21} \end{bmatrix}$$

である。

5. 本問題は、状態推定器の応用問題である。一般に外乱が存在すると状態変数の推定には誤差が伴う。誤差の原因の考察を踏まえて、誤差のない状態推定が達成されるための条件を学習してほしい。制御対象のパラメータ行列は

$$A=\begin{bmatrix} -10 & -1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

(a) 可観測性行列 U_o は

$$U_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}$$

より $\mathrm{rank}U_o=2$ であるため対 (C, A) は可観測である。

(b) ① -10 ② $-h_2$ ③ $A-HC-\alpha I_2$ ④ $h_2+\alpha$ ⑤ $10+\alpha$ ⑥ $10+\alpha$ ⑦ 25 ⑧ 25 ⑨ 10

(c) ① FN ② $e^{\hat{A}(t-\tau)}FN$ ③ FN ④ -10

(d) $CN=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T=1, \quad N=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ であるので、

条件 I : $\mathrm{rank}CN=\mathrm{rank}N=1$

を満足することが確認される。つぎに

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_2 & N \\ C & 0 \end{bmatrix}\\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -10-\lambda & -1 & 0 \\ 25 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2+\operatorname{rank}(10+\lambda)\end{aligned}$$

より

$$\text{条件 II :}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_2 & N \\ C & 0 \end{bmatrix} = 3$$

が非負の実部を有する全ての複素数 λ に対して成り立つことが確認される。条件 II を満足しない λ は $\lambda = -10$ であり、この値は小問 (c) で求めた $\alpha = -10$ と一致する。ところで、条件 II を満足しない λ はシステム (A, N, C) の安定な不変零点である。それゆえ、システム (A, N, C) の安定な不変零点が最小次元状態推定器の極となるよう設計されるとき、外乱が存在しても状態推定が可能となることに気付く。

(e) 小問 (d) の考察と小問 (c) の結果より、$\hat{A} = \alpha = -10$ であり、行列 F は

$$F = \gamma\begin{bmatrix} 25 & 10-10 \end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}, \forall\gamma \neq 0$$

である。(10.9) 式より

$$\hat{B} = FB = \gamma\begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 25\gamma, \quad \forall\gamma \neq 0$$

であり、また $\hat{N} = FN$ より

$$\hat{N} = FN = \gamma\begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

である。(10.21) 式より

$$\begin{bmatrix}\hat{D} & \hat{C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C \\ F\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 25\gamma & 0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{25\gamma} \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

なので

$$\hat{C} = \frac{1}{25\gamma}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

である。最後に、(10.19) 式と小問 (b) の結果より

$$G = FH = \gamma\begin{bmatrix}25 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 10-25\beta\end{bmatrix} = -25\gamma$$

(f) (10.17) 式を使って状態変数の推定誤差 $\hat{x}(t) - x(t)$ を求めると

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) - x(t) &= \begin{bmatrix}C \\ F\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}y(t) \\ \omega(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}C \\ F\end{bmatrix}x(t)\right\} \\ &= \begin{bmatrix}\hat{D} & \hat{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ \varepsilon(t)\end{bmatrix} = \hat{C}\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{25\gamma}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

である。小問 (c) の結果より得られた $\varepsilon(t)$ を代入し、$d(t)$: 単位ステップ信号、$\varepsilon(0) = 0$ を考慮すれば

$$\hat{x}_1 - x_1(t) = \frac{\varepsilon(t)}{25\gamma} = -\frac{10+\alpha}{25}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}d\tau = \frac{10+\alpha}{25\alpha}\left(1 - e^{\alpha t}\right)$$

である。このとき、定常状態における状態推定誤差は $\mathrm{Re}\alpha < 0$ より

$$\lim_{t\to\infty}\{\hat{x}_1 - x_1(t)\} = \frac{10+\alpha}{25\alpha}$$

なので、$\alpha \neq -10$ のときには $\lim_{t\to\infty}\{\hat{x}_1 - x_1(t)\} < \infty$ であり、仮に $|\alpha| \to \infty$ にしても $\lim_{t\to\infty}\{\hat{x}_1 - x_1(t)\} = \frac{1}{25}$ として定常状態における状

態推定誤差が残る。一方、$\alpha = -10$ のときには $\hat{x}_1 - x_1(t) = 0, \forall t$ となり、定常状態においても推定誤差が残らない。すなわち、単位ステップ信号の外乱の場合 $\hat{A} = -10$ として最小次元状態推定器を設計すれば、外乱が存在したとしても状態推定が達成される。

6. (a) (10.6) 式の第 1 式目の両辺をラプラス変換し、すべての初期値を零にすると

$$\hat{X}(s) = (sI_n - A + HC)^{-1}\{BU(s) + HY(s)\}$$

となる。題意より、状態フィードバック制御においてもラプラス変換すると $U(s) = -K\hat{X}(s)$ なので、$\hat{X}(s)$ の式を代入して

$$U(s) = -K(sI_n - A + HC)^{-1}\{BU(s) + HY(s)\}$$

であるので、$U(s)$ について解くと

$$\begin{aligned} U(s) &= -\left\{I_m + K(sI_n - A + HC)^{-1}B\right\}^{-1} \\ &\quad \times K(sI_n - A + HC)^{-1}HY(s) \\ &= -K(sI_n - A + HC)^{-1}\left\{I_n + BK(sI_n - A + HC)^{-1}\right\}^{-1}HY(s) \\ &= -K(sI_n - A + HC + BK)^{-1}HY(s) \end{aligned}$$

である。それゆえ、制御器 $G_c(s)$ のパラメータ行列 A_c, B_c, C_c, D_c は

$$A_c = A - HC - BK, \quad B_c = H, \quad C_c = I_n, \quad D_c = O_{n\times l}$$

となる。

(b) (10.7) 式の両辺をラプラス変換し、すべての初期値を零にすると

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Omega(s) &=& \left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}\left\{\hat{B}U(s) + GY(s)\right\} \\ \hat{X}(s) &=& \hat{C}\Omega(s) + \hat{D}Y(s) \end{array}\right.$$

となる。このとき

$$\hat{X}(s) = \hat{C}\left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}\hat{B}U(s) + \left\{\hat{C}\left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}G + \hat{D}\right\}Y(s)$$

なので

$$\begin{aligned} U(s) = -K\hat{X}(s) &= -K\hat{C}\left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}\hat{B}U(s) \\ &-K\left\{\hat{C}\left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}G + \hat{D}\right\}Y(s) \end{aligned}$$

であるので、$U(s)$ について解き、ドイルの記法を用いて伝達関数行列の積を計算すると

$$\begin{aligned} U(s) &= -\left\{I_m + K\hat{C}\left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}\hat{B}\right\}^{-1} \\ &\quad \times K\left\{\hat{C}\left(sI_{n-l} - \hat{A}\right)^{-1}G + \hat{D}\right\}Y(s) \\ &= -\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline K\hat{C} & I_m \end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & G \\ \hline K\hat{C} & K\hat{D} \end{array}\right]Y(s) \\ &= -\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} - \hat{B}K\hat{C} & \hat{B} \\ \hline -K\hat{C} & I_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & G \\ \hline K\hat{C} & K\hat{D} \end{array}\right]Y(s) \\ &= -\left[\begin{array}{cc|c} \hat{A} - \hat{B}K\hat{C} & \hat{B}K\hat{C} & \hat{B}K\hat{D} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & \hat{A} & G \\ \hline -K\hat{C} & K\hat{C} & K\hat{D} \end{array}\right]Y(s) \end{aligned}$$

である。ここで、座標変換を施すと

$$\begin{bmatrix} -K\hat{C} & K\hat{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-l} & I_{n-l} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & I_{n-l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K\hat{C} & O_{m\times(n-l)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n-l} & -I_{n-l} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & I_{n-l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{B}K\hat{D} \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}K\hat{D} - G \\ G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n-l} & -I_{n-l} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{B}K\hat{C} & \hat{B}K\hat{C} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-l} & I_{n-l} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & I_{n-l} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{B}K\hat{C} & O_{(n-l)\times(n-l)} \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & \hat{A}+\hat{B}K\hat{C} \end{bmatrix}$$

より

$$U(s) = -\left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}-\hat{B}K\hat{C} & O_{(n-l)\times(n-l)} & \hat{B}K\hat{D}-G \\ O_{(n-l)\times(n-l)} & \hat{A}+\hat{B}K\hat{C} & G \\ \hline -K\hat{C} & O_{m\times(n-l)} & K\hat{D} \end{array}\right] Y(s)$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}-\hat{B}K\hat{C} & \hat{B}K\hat{D}-G \\ \hline K\hat{C} & -K\hat{D} \end{array}\right] Y(s)$$
$$= -K\left\{-\hat{C}\left(sI_{n-l}-\hat{A}+\hat{B}K\hat{C}\right)^{-1}\left(\hat{B}K\hat{D}-G\right)+\hat{D}\right\}Y(s)$$

である。それゆえ、制御器 $G_c(s)$ のパラメータ行列 A_c, B_c, C_c, D_c は

$$A_c = \hat{A}-\hat{B}K\hat{C}, \quad B_c = \hat{B}K\hat{D}-G, \quad C_c = -\hat{C}, \quad D_c = \hat{D}$$

となる。