付録

第5章

【付録5.1】式（5.22）の誘導過程

圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{式（5.21b）}$$

上記の偏微分方程式を，以下の境界条件①と②および初期条件③を満足するように，変数分離法を用いて解析解を求める。

z=0 において t に無関係に u=0 ①

z=2D において t に無関係に u=0 ②

t=0 において z に無関係に u=u_i ③

式（5.21b）に$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$を代入すると以下のようになる。

$$Z(z) \cdot \frac{dT(t)}{dt} = c_v \frac{dZ(z)}{dz} \cdot T(t)$$

両辺を$Z(z) \cdot T(t) \cdot c_v$で割ると，両辺に t と z の変数をまとめることができる。

$$\frac{1}{c_v}\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -\lambda^2$$

上式の値を－λ^2 と仮定すると，以下のような t と z の常微分方程式で表すことができる。

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2 c_v T(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -\lambda^2 Z(z) \qquad (2)$$

式(1)と(2)の一般解は，C_1，C_2 および C_3 を積分定数として，それぞれ以下のようになる。

$$T(t) = C_1 \cdot \exp(-\lambda^2 c_v t) \qquad (3)$$

$$Z(z) = C_2 \cdot \sin(\lambda z) + C_3 \cdot \cos(\lambda z) \qquad (4)$$

以上より，$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$の一般解は，以下のようになる。

$$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t) = C_1 \cdot \exp(-\lambda^2 c_v t)\{C_2 \cdot \sin(\lambda z) + C_3 \cdot \cos(\lambda z)\}$$

C_4= C_1×C_2 および C_5= C_1×C_3 と置きなおすと，以下のようになる。

$$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t) = \exp(-\lambda^2 c_v t)\{C_4 \cdot \sin(\lambda z) + C_5 \cdot \cos(\lambda z)\} \qquad (5)$$

式(5)が境界条件①を満足する（z=0 の時 u=0 となる）には

$u(0,t) = Z(0) \cdot T(t) = \exp(-\lambda^2 c_v t)\{C_4 \cdot \sin(0) + C_5 \cdot \cos(0)\} = C_5 \cdot \exp(-\lambda^2 c_v t) = 0$ より C_5=0

式(5)が境界条件②を満足する（z=2D の時 u=0 となる）には，

$u(0,t) = \exp(-\lambda^2 c_v t)\{C_4 \cdot \sin(\lambda \cdot 2D) + C_5 \cdot \cos(\lambda \cdot 2D)\} = C_4 \cdot \sin(\lambda \cdot 2D) \cdot \exp(-\lambda^2 c_v t) = 0$ となり

C_4=0 とすると，$u(z,t)$が常にゼロになってしまうことから，以下の条件が必要となる。

$$\sin(\lambda \cdot 2D) = 0$$

以上より，n を自然数として

$$\lambda \cdot 2D = n\pi$$

したがって，

$$\lambda = \frac{n\pi}{2D}$$

以上を整理すると

$$u(z,t) = C_4 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2D}z\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2D}\right)^2 c_v t\right) = C_4 \cdot \sin\frac{n\pi}{2D}z \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}n^2\pi^2 c_v t\right)$$

一般解は，n が複数ある場合でも解となりうる（複数の n の解の重ね合わせができる）ので，C_4 を C_n としてより一般的な形で表すと，

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2D}z\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}n^2\pi^2 c_v t\right) \qquad (6)$$

式(6)が初期条件③を満足する（t=0 の時 u=u_i となる）には，

$$u(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2D}z\right) = u_i$$

両辺に$\sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right)$をかけて 0 から 2$D$ まで z で積分すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{2D} \sin\left(\frac{n\pi}{2D}z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right) dz = \int_0^{2D} u_i \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right) dz \qquad (7)$$

ここで，$m \neq n$のとき，$z' = z/2D\ (dz = 2 \cdot\cdot dz')$とすると

$$\int_0^{2D} \sin\left(\frac{n\pi}{2D}z\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right) dz = 2D\int_0^1 \sin\left(n\pi z'\right) \cdot \sin\left(m\pi z'\right) dz' = -\frac{1}{2}\int_0^1 [\cos(n+m)\pi z' - \cos(n-m)\pi z']dz'$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\pi z'}{(n+m)\pi} - \frac{\sin(n-m)\pi z'}{(n-m)\pi}\right]_0^1 = 0$$

となり，$m = n$のとき

$$\int_0^{2D} \sin\left(\frac{n\pi}{2D}z\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right) dz = 2D\int_0^1 \sin\left(n\pi z'\right) \cdot \sin\left(n\pi z'\right) dz' = 2D\int_0^1 \sin^2\left(n\pi z'\right) dz'$$

$$= 2D\int_0^1 \left(\frac{1 - cos2n\pi z'}{2}\right) dz' = 2D\left[\frac{1}{2}z' - \frac{sin2n\pi z'}{4}\right]_0^1 = D$$

したがって，式(7)は，

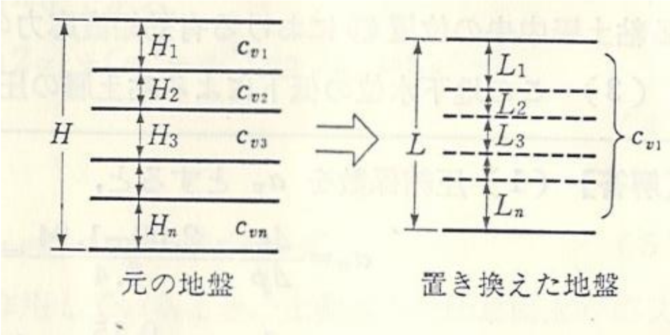
$$C_m \cdot D = \int_0^{2D} u_i \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right) dz$$

$$C_m = \frac{1}{D}\int_0^{2D} u_i \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2D}z\right) dz \qquad (8)$$

式(8)の m を n におきなおして，式(6)に代入すると式（5.22）が得られる。

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{D}\int_0^{2D} u_i \cdot sin\frac{n\pi z}{2D}dz\right)\left(sin\frac{n\pi z}{2D}\right) exp\left[-\frac{1}{4}n^2\pi^2 T_v\right] \quad \text{式（5.22）}$$

【付録 5.2】式（5.31）の誘導過程



図のように，圧密係数 c_v と層厚 H が異なる n 層からなる粘土層がある。この粘土層を圧密係数 c_{v0} を有する厚さ L の 1 層系の地盤に置き換える。

粘土層の排水長を D，圧密度 U に相当する時間係数を T_v とすると，圧密度 U に達するまでの所要時間 t は，次式（5.30）で表される。

$$t = \frac{D^2 \cdot T_v}{c_v} \qquad \text{式（5.30）}$$

したがって，第 1 層については，第 1 層の換算層厚 L_1 とすると，

$$t = \frac{1}{c_{v1}}\left(\frac{H_1}{2}\right)^2 T_v = \frac{1}{c_{v0}}\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 T_v \qquad \therefore L_1 = H_1$$

第 2 層については，第 2 層の換算層厚 L_2 とすると，

$$t = \frac{1}{c_{v2}}\left(\frac{H_2}{2}\right)^2 T_v = \frac{1}{c_{v0}}\left(\frac{L_2}{2}\right)^2 T_v \qquad \therefore L_2 = H_2\sqrt{c_{v0}/c_{v2}}$$

以下同様に，第 3 層から第 n 層まで考えると

$$L_3 = H_3\sqrt{c_{v0}/c_{v3}}$$
$$\vdots$$
$$L_n = H_n\sqrt{c_{v0}/c_{vn}}$$

したがって，換算層厚の全体の層厚 L は，

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = H_1\sqrt{c_{v0}/c_{v1}} + H_2\sqrt{c_{v0}/c_{v2}} + H_3\sqrt{c_{v0}/c_{v3}} + \cdots + H_n\sqrt{c_{v0}/c_n} \qquad \text{式（5.31）}$$

【付録 5.3】ルート t 法の解説

圧密沈下量 S と $\sqrt{t}$ の空間における初期の直線部分の傾斜角 α は，以下のように表すことができる。

$$tan\alpha = \left(\frac{\sqrt{t}}{S}\right)_{t=0}$$

ここで，圧密沈下量 S，圧密度 U と最終沈下量 S_f の関係式（5.29）および時間係数の式（5.30）を代入すると

$$tan\alpha = \left(\frac{D\sqrt{T_v}}{S_f \cdot U \cdot \sqrt{c_v}}\right)_{t=0} = \frac{D}{S_f \cdot \sqrt{c_v}}\left(\frac{\sqrt{T_v}}{U}\right)_{t=0}$$

ここで，圧密度が 50%以下の場合には，$U \cong 2\sqrt{\frac{T_v}{\pi}}$の関係があるため，$\left(\frac{\sqrt{T_v}}{U}\right)_{t=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886$となり，

$$tan\alpha = 0.886\frac{D}{S_f \cdot \sqrt{c_v}}$$

次に, 圧密沈下量 S と$\sqrt{t}$の空間において, 圧密開始点から圧密度 U が 90%になった時間 $t_{90\%}$と圧密沈下量 $S_{90\%}$までの直線部分の傾斜角 a'を考えると

$$tan\alpha' = \left(\frac{\sqrt{t}}{S}\right)_{t=90\%} = \left(\frac{D\sqrt{T_v}}{S_f \cdot U \cdot \sqrt{c_v}}\right)_{t=90\%} = \frac{D}{S_f \cdot \sqrt{c_v}}\left(\frac{\sqrt{T_v}}{U}\right)_{t=90\%}$$

表 5-4 のケース 1 において圧密度 U が 90%になる時間係数 $T_{v90\%}$は 0.848 であるので

$$tan\alpha' = \frac{D}{S_f \cdot \sqrt{c_v}}\frac{\sqrt{0.848}}{0.9} = 1.023\frac{D}{S_f \cdot \sqrt{c_v}}$$

したがって，tanαと tanα'を比較すると，

$$tan\alpha' = \frac{1.023}{0.886}tan\alpha = 1.15 \cdot tan\alpha$$