1章

静定構造の断面力

本章では，鉄筋コンクリート（RC）構造やプレストレストコンクリート（PC）構造の断面力解析を行う際の最重要事項について取りまとめている．とりわけ，荷重，せん断力および曲げモーメントの関係を理解しておくことが最大のポイントであるが，これに分布荷重を集中荷重に置き換える“技”を用いることにより，すべて同じ方法で断面力が算出できることを説明している．本章を読んで，集中荷重による断面力の計算手順さえマスターしておけば，表計算ソフトを用いることでさまざまなケースの断面力が算出できるようになり，構造計算手法を“身に付ける”ことができるのである．

1.1　力の釣合い

物体に多くの力が作用する場合，これらの力を同じ効果を表すような一つの力に置き換える（合成する）ことができる時，置き換えられた一つの力を合力という．逆に，一つの力を多くの力に置き換える（分解する）ことができた場合，置き換えられた力を分力という．力が1点に働いている場合の力の合成を図-1.1（a）に，力が1点に会しない場合を図-1.1（b）に模式的に示す．いずれも，P_1 と P_2 の合力が P である．ここで，図-1.1（a）は力の平行四辺形と呼ばれている．

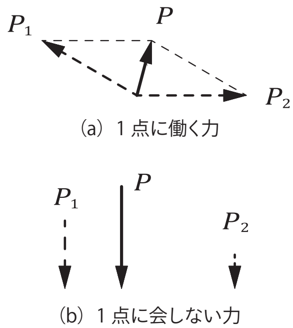


図-1.1　合力と分力

物体に作用する一群の力が物体の運動状態を変えることがない時（たとえば静止している時），この一群の力は釣り合っており，この物体は釣合いの状態にある（図-1.2）．

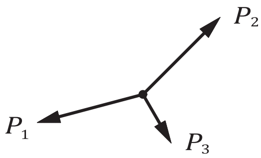


図-1.2　力の釣合い

1.2　力のモーメント

(1) 力のモーメント

力 P は，力の作用線上にない任意の点Oに，力のモーメント M を生じさせる（図-1.3）．

$$M = P \cdot L \qquad (1.1)$$

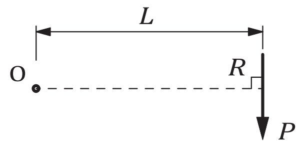


図-1.3　力のモーメント

(2) 偶力のモーメント

偶力は，反対方向を向いている大きさの等しい一組の平行な力である．モーメントの大きさは，力のモーメントの場合と同じである（図-1.4）．

$$M = P \cdot L \qquad (1.2)$$

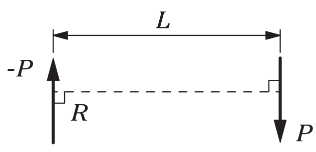


図-1.4　偶力のモーメント

1.3　静定構造

物体が外力を受けて静止している時，外力と反力は釣り合っている，釣合い条件は，水平方向力 $\sum H$，鉛直方向力 $\sum V$，モーメント $\sum M$ について，$\sum H=0$，$\sum V=0$，$\sum M=0$ を満たすことである．この釣合い条件のみから反力を決定することができる構造が静定構造である．

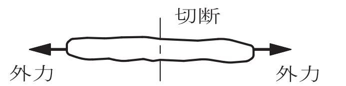
外力は与条件であるので，反力が決定できれば，すべての力が明らかになったことになり，断面力を求めることができる．

1.4　外力と内力

外力は，物体に作用している力やモーメントのことである．内力は，外力により物体の内部に生じる力であり，外力は物体の中を内力として伝わっていく．

外力は，作用している位置や状況を見たり感じたりできるが，内力は物体の内部に生じているので感覚で捉えることができず，理解しにくい．

内力を可視化して理解しやすくする方法として，自由体図（Free-body diagram）がある．



(a) 外力を受ける棒

(b) 自由体図

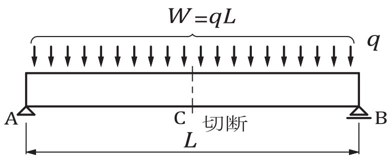
図 -1.5　自由体図による内力の可視化

ここでは，外力を受ける棒の内力を，自由体図を用いて考える（図 -1.5）．

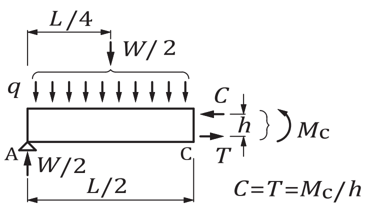
外力として引張力を受ける棒を図 -1.5（a）に示す．この棒に作用している外力は釣り合っている．ここで，棒の中央の内力を知ろうとする場合，まず棒の中央を仮に切断したと考える．この切断された物体を自由体という．自由体図を図 -1.5（b）に示す．自由体においても力が釣り合っていることが分かる．

次に，外力を受ける単純梁の内力を，自由体図を用いて考える（図 -1.6）．

外力として等分布荷重を受ける単純梁を図 -1.6（a）に示す．ここで，支間中央の内力を調べる場合，支間中央を仮想的に切断する．この切断された物体は自由体である．自由体図を図 -1.6（b）に示す．



(a) 外力を受ける単純梁



(b) 自由体図

図 -1.6　自由体図による内力の可視化

次に，等分布荷重が載荷された単純梁における支間中央の内力として曲げモーメントを，自由体図を用いて算出してみる．

荷重の合計は $W=qL$ であり，支点から $x=L/4$ の位置に集中荷重として作用すると考える．支点反力は $R=W/2=qL/2$ となる．

支間中央に生じるせん断力については，直感的に 0 と考え（後述），図では省略している．

自由体図におけるモーメントの釣合いから，支間中央の曲げモーメントを M_{C} とすると

$$M_{\mathrm{C}}-(W/2)\cdot(L/4)=0 \qquad (1.3)$$

$$M_{\mathrm{C}}=WL/8=(qL^2)/8 \qquad (1.4)$$

ここで，鉛直方向の荷重によるモーメントに釣り合っているのが，水平方向の内力 C と T に起因する M_C であることは，梁構造のポイントであり，このイメージは，トラス構造やアーチ構造にも繋がっていくので覚えておくとよい．

1.5　断面力

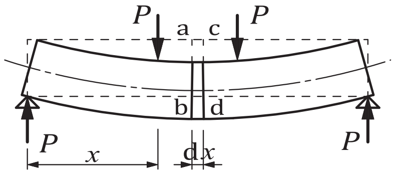
1.5.1　曲げを受ける梁

まず，単純梁や片持梁に外力が作用し曲げを受けて変形して（たわんで）いる状態を考える．一例として，単純梁に集中荷重が 2 点載荷され正の曲げを受けた状態を，図 -1.7 に示す．本書では，曲げに関する説明も，せん断に関する説明も，この載荷試験のイメージを基にしているので，覚えておきたい．

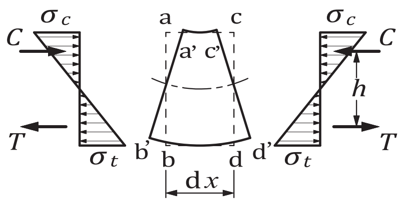
図 -1.7　曲げを受ける梁

梁が外力の作用により曲げを受けると，梁の断面（内部）に外力に応じて抵抗する内力（応力）が生じる（図 -1.8）．ここでは，この内力（応力）について説明する．

梁の中間部に微小な距離 $\mathrm{d}x$ だけ離れた平行な断面 a b と c d を考える．正の曲げを受けると，上側は縮み，下側は伸びる．断面 a b は a’ b’ になり，断面 c d は c’ d’ になる．負の曲げを受けると，伸び，縮みは逆向きになる．梁の上側が縮むのは上側に押さえつけようとする応力度 σ_c が働いているからで，下側が伸びるのは下側に引っ張ろうとする応力度 σ_t が働いているからである．



(a) 曲げを受ける梁の変形



(b)　微小区間のひずみ・応力度・力

図 -1.8　外力モーメントと曲げモーメント

1.5.2　力，変形および応力度の関係

単純梁に外力が作用し曲げを受けると，変形し静止する．単純梁に集中荷重 P が 2 点載荷され，変形して静止している状態が図 -1.8 である．

集中荷重による外力モーメントは $M_E = P \cdot x$ である．この外力モーメントにより梁が変形している時，梁の上側は縮む方向にひずみ（圧縮ひずみ），下側は伸びる方向にひずむ（引張ひずみ）．

圧縮ひずみに比例して圧縮応力度 σ_c，引張ひずみに比例して引張応力度 σ_t が生じている（フックの法則）．

上側の圧縮応力度 σ_c を合計すると圧縮力 C になり，下側の引張応力度 σ_t を合計すると引張力 T になる．圧縮力 C と引張力 T は，大きさが同じで向きが反対の偶力である．

梁断面内部に生じる偶力のモーメントは $M_I = C \cdot h = T \cdot h$ であり，梁が変形し静止している時，この内部に生じたモーメント M_I と外力モーメント $M_E = P \cdot x$ は釣り合っている．

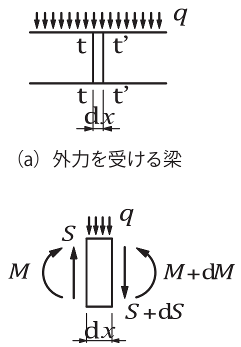
梁内部の垂直応力 σ の偶力モーメント $M_I = C \cdot h = T \cdot h$ が曲げモーメントである．曲げモーメントは外力によるモーメント M_E と釣り合っているため，外力モーメントの意味で曲げモーメントとい

う用語が用いられることも多い．本書でも両者の意味で曲げモーメントという用語を用いている．

1.5.3 荷重，せん断力および曲げモーメントの関係

RC 構造や PC 構造の断面力解析を行おうとするとき最も大切な事項は，荷重，せん断力および曲げモーメントの関係を理解しておくことである．

ここでは，梁の任意の断面に作用する荷重と，せん断力・曲げモーメントの関係を考える．図 -1.9（a）に示すように，外力を受ける梁から微小区間 dx をへだてた 2 つの断面 t t, t't' で微小部分を切り取る．この微小部分のせん断力・曲げモーメントを図 -1.9（b）に示す．長さ dx の微小部分は外力を受けて釣合いを保っている．



(a) 外力を受ける梁

(b) 微小部分のせん断力と曲げモーメント

図 -1.9 せん断力と曲げモーメント

まず，鉛直方向の力の釣合い条件 $\sum V = 0$ より

$$S - q\mathrm{d}x - (S + \mathrm{d}S) = 0 \quad (1.5)$$

$$\mathrm{d}S = -q\mathrm{d}x \quad (1.6)$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -q \quad (1.7)$$

次に，断面 t' t' 上の重心をモーメント中心にとった釣合い条件 $\sum M = 0$ から

$$M - (q\mathrm{d}x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2} + S\cdot\mathrm{d}x - (M + \mathrm{d}M) = 0 \quad (1.8)$$

ここで，高次の微小量 $q(\mathrm{d}x)^2/2$ を無視すると

$$\mathrm{d}M = S\mathrm{d}x \quad (1.9)$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = S \quad (1.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = -q \quad (1.11)$$

荷重と，せん断力・曲げモーメントの関係を示す図 -1.9 は，単純ではあるが非常に重要な図である．この先，せん断力・曲げモーメントを式（1.12），式（1.13）を使って計算する時には，常に想い起こしたい．

1.6 断面力解法の要点

1.6.1 片持梁

片持梁は，最も基本的な構造ではあるが，大規模な土木構造物に用いられることは少ない．しかし，身近なところには多く適用されており，歩道の拡幅に適用された事例を図 -1.10 に示す．

図 -1.10 片持梁の一例

(1) 構造モデル

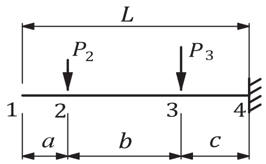


図 -1.11　構造モデル

片持梁の構造モデルを図 -1.11 に示す．図 -1.10 のような奥行きのある版構造でも，単位奥行き（1.0 m）の梁として設計されることが多い．

(2) 荷重モデル

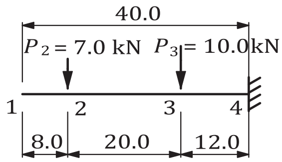


図 -1.12　荷重モデル

荷重は，図 -1.12 に示すとおり，2 ヶ所に集中荷重が作用するものとする．

(3) 断面力

1）せん断力 S

構造計算は反力を求めることから始めるが，片持梁の場合，反力は荷重の合計値で自明であるので，反力の算出は省略できる．

設計断面 i のせん断力 S_i は，式（1.6）から

$$S_i = S_{i-1} - P_i \tag{1.12}$$

$$S_i = 0 \quad \text{kN}$$

$$S_2 = S_1 - P_2 = 0 - 7.0 = -7.0 \quad \text{kN}$$

$$S_3 = S_2 - P_3 = -7.0 - 10.0 = -17.0 \quad \text{kN}$$

せん断力図を，図 -1.13（a）に示す．

2）曲げモーメント M

設計断面 i の曲げモーメント M_i は，式（1.9）から

$$M_i = M_{i-1} + S_{i-1}\Delta x_i \tag{1.13}$$

ここで，Δx_i は，設計断面 $i-1$ から設計断面 i までの区間長である．

$$M_1 = 0 \quad \text{kNm}$$

$$M_2 = M_1 + S_1\Delta x_2 = 0 + 0.0 \times 8.0$$

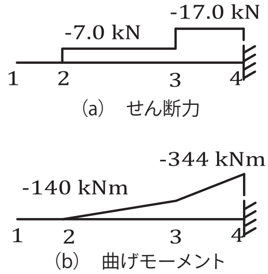
$$= 0 \quad \text{kNm}$$

$$M_3 = M_2 + S_2\Delta x_3 = 0 - 7.0 \times 20.0$$

$$= -140 \quad \text{kNm}$$

$$M_4 = M_3 + S_3\Delta x_4 = -140 - 17.0 \times 12.0$$

$$= -344 \quad \text{kNm}$$



（a）　せん断力

（b）　曲げモーメント

図 -1.13　断面力

曲げモーメント図を図 -1.13（b）に示す．

(4) 表を用いた計算

断面力は，表を用いることにより容易に計算でき，また理解しやすい（表 -1.1）．

表 -1.1　断面力の計算

格点	集中荷重 P_i (kN)	反力 R (kN)	せん断力 $S_i = S_{i-1} - P_i$ (kN)	区間長 Δx_i (m)	曲げモーメント $M_i = M_{i-1} + S_{i-1}\Delta x_i$ (kNm)
1	0	0	0	0	0
2	7.0	——	-7.0	8.0	0
3	10.0	——	-17.0	20.0	-140
4	0	17.0	——	12.0	-344
計	17.0	17.0	——	40.0	———

1.6.2　単純梁

単純梁は，最も基本的な構造であり，街中から山奥まで至る所で目にすることができる．鉄道橋の事例を図 -1.14 に示す．

図 -1.14　単純梁の一例

(1) 構造モデル

単純梁の構造モデルを図 -1.15 に示す．

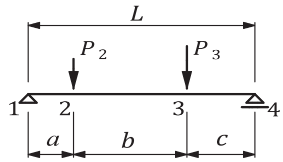


図 -1.15　構造モデル

(2) 荷重モデル

荷重は，図 -1.16 に示すとおり，2 ヶ所に集中荷重が作用するものとする．この荷重モデルは，図 -1.7 に示した載荷試験のイメージである．

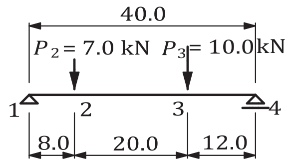


図 -1.16　荷重モデル

(3) 反力

構造計算は，まず反力を求めることから始める．

点 1 の反力は，点 4 のモーメント M_4 の集計が 0 になることから，

$$\sum M_4 = R_1(a+b+c) - P_2(b+c) - P_3 \cdot c = 0 \qquad (1.14)$$

$$R_1 = \frac{P_2(b+c) + P_3 \cdot c}{a+b+c} \qquad (1.15)$$

$$= \frac{7.0 \times (20.0 + 12.0) + 10.0 \times 12.0}{8.0 + 20.0 + 12.0} = 8.6 \quad \text{kN}$$

点 4 の反力は，同様に，

$$\sum M_1 = -R_4(a+b+c) + P_2 \cdot a + P_3(a+b) = 0 \qquad (1.16)$$

$$R_4 = \frac{P_2 \cdot a + P_3(a+b)}{a+b+c} \qquad (1.17)$$

$$= \frac{7.0 \times 8.0 + 10.0 \times (8.0 + 20.0)}{8.0 + 20.0 + 12.0} = 8.4 \quad \text{kN}$$

ここで，反力の合計値は，荷重の合計値 17.0 kN に一致している．

(4) 断面力

1）せん断力 S

設計断面 i のせん断力 S_i は，式（1.6）から

$$S_i = S_{i-1} - P_i \tag{1.18}$$

$$S_i = 8.6 \quad \text{kN}$$

$$S_2 = S_1 - P_2 = 8.6 - 7.0 = 1.6 \quad \text{kN}$$

$$S_3 = S_2 - P_3 = 1.6 - 10.0 = -8.4 \quad \text{kN}$$

せん断力図を図 -1.17（a）に示す．

2）曲げモーメント M

設計断面 i の曲げモーメント M_i は，式（1.9）から

$$M_i = M_{i-1} + S_{i-1}\Delta x_i \tag{1.19}$$

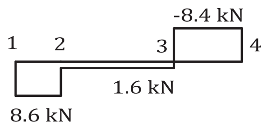
ここで，$\Delta\, x_i$ は，設計断面 $i-1$ から設計断面 i までの区間長である．

$$M_1 = 0 \quad \text{kNm}$$

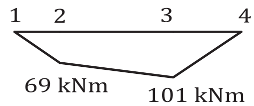
$$M_2 = M_1 + S_1\Delta x_2 = 0 + 8.6 \times 8.0$$
$$= 68.8 \quad \text{kNm}$$

$$M_3 = M_2 + S_2\Delta x_3 = 68.8 + 1.6 \times 20.0$$
$$= 100.8 \quad \text{kNm}$$

$$M_4 = M_3 + S_3\Delta x_4 = 100.8 - 8.4 \times 12.0$$
$$= 0 \quad \text{kNm}$$



(a)　せん断力



(b)　曲げモーメント

図 -1.17　断面力

曲げモーメント図を図 -1.17（b）に示す．

(5) 表を用いた計算

反力および断面力は，表を用いることで容易に計算でき，また理解しやすい．

1）反力の計算

反力の計算を表 -1.2 に示す．ここでは，反力の合計値が荷重の合計値に一致していることを確認しておくと安心である．

表 -1.2　反力の計算

格点	集中荷重	区間長	格点1 の反力			格点4 の反力		
	P_i (kN)	Δx_i (m)	格点4からの距離 x_i (m)	$P_i x_i$ (kNm)	反力 $R_1 = \sum P_i x_i / L$ (kN)	格点1からの距離 x_i (m)	$P_i x_i$ (kNm)	反力 $R_4 = \sum P_i x_i / L$ (kN)
1	0	0	40.0	0	——	0	0	——
2	7.0	8.0	32.0	224.0	——	8.0	56.0	——
3	10.0	20.0	12.0	120.0	——	28.0	280.0	——
4	0	12.0	0	0	——	40.0	0	——
計	17.0	40.0	——	344.0	8.6	——	336.0	8.4

2）断面力の計算

断面力（せん断力・曲げモーメント）の計算を表 -1.3 に示す．ここでは，格点 4 の曲げモーメントが 0 になっていることを確認しておくとよい．

表 -1.3　断面力の計算

格点	集中荷重 P_i (kN)	反力 R (kN)	せん断力 $S_i = S_{i-1} - P_i$ (kN)	区間長 Δx_i (m)	曲げモーメント $M_i = M_{i-1} + S_{i-1}\Delta x_i$ (kNm)
1	0	8.6	8.6	0	0
2	7.0	——	1.6	8.0	69
3	10.0	——	-8.4	20.0	101
4	0	8.4	——	12.0	0
計	17.0	17.0	——	40.0	———

1.7　格点荷重への変換

断面力（せん断力･曲げモーメント）を計算する場合，分布荷重は取り扱いにくいが，格点荷重（集中荷重）に置き換えると，あらゆるケースに対応できる．とくに，不静定力を算出する際にはどうしても必要になる“技”である．そこで，本書では断面力の計算法はすべて集中荷重が載荷された場合について説明することとした．

1.7.1　荷重モデル

荷重は，図 -1.18 に示す一般的な分布曲線を考える．A 点の荷重強度を y_a，B 点の荷重強度を y_b とする．

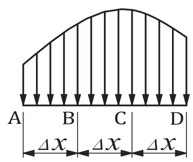


図 -1.18　荷重の分布曲線

1.7.2　荷重分布を直線と仮定する場合の格点荷重の算出

ここでは，荷重分布を直線と仮定する（図 -1.19）．

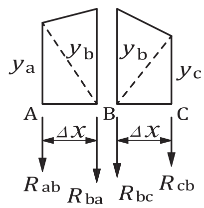


図 -1.19　直線とみなした荷重分布

(1) 格点間を単純梁とみなした反力の算出

単純梁 A B（図 -1.20）について，台形荷重を三角形 L（左側）と三角形 R（右側）に分けて考える（図 -1.21）．

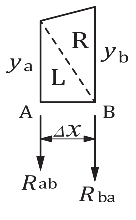
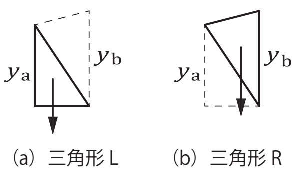


図 -1.20　単純梁 AB



(a) 三角形 L　(b) 三角形 R

図 -1.21　三角形 L および R への分離

三角形 L の面積　$$A_{abL} = \frac{1}{2} y_a \Delta x \qquad (1.20a)$$

三角形Lの右アーム長　$l_{abL}=\frac{2}{3}\Delta x$　(1.20b)

三角形Lの点Aの反力　$R_{abL}=\frac{1}{2}y_a\Delta x\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}y_a\Delta x$　(1.20c)

三角形Rの面積　$A_{abR}=\frac{1}{2}y_b\Delta x$　(1.21a)

三角形Rの右アーム長　$l_{abR}=\frac{1}{3}\Delta x$　(1.21b)

三角形Rの点Aの反力　$R_{abR}=\frac{1}{2}y_b\Delta x\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}y_b\Delta x$　(1.21c)

三角形R＋三角形Lの点Aの反力は，

$$R_{ab}=\frac{1}{3}y_a\Delta x+\frac{1}{6}y_b\Delta x=\frac{\Delta x}{6}(2y_a+y_b) \tag{1.22}$$

同様に，三角形R＋三角形Lの点Bの反力は，

$$R_{ba}=\frac{1}{6}y_a\Delta x+\frac{1}{3}y_b\Delta x=\frac{\Delta x}{6}(y_a+2y_b) \tag{1.23}$$

また，単純梁BCについて，

$$R_{bc}=\frac{\Delta x}{6}(2y_b+y_c) \tag{1.24}$$

$$R_{cb}=\frac{\Delta x}{6}(y_b+2y_c) \tag{1.25}$$

(2) B点の格点荷重

格点荷重を w_b とすると，

$$w_b=R_{ba}+R_{bc}=\frac{\Delta x}{6}(y_a+4y_b+y_c) \tag{1.26}$$

(3) 求める格点荷重

格点 r の荷重強度を y_r とすると，格点荷重 w_r は，

格点1（始点）の場合

$$w_1=\frac{\Delta x}{6}(2y_1+y_2) \tag{1.27a}$$

中間格点 r の場合

$$w_r=\frac{\Delta x}{6}(y_{r-1}+4y_r+y_{r-1}) \tag{1.27b}$$

格点 n（終点）の場合

$$w_n=\frac{\Delta x}{6}(y_{n-1}+2y_n) \tag{1.27c}$$

1.7.3　荷重分布を二次曲線と仮定する場合

本書で例題として示したような構造モデルおよび荷重モデルであれば，荷重分布を直線と仮定して格点荷重を算出すればよいが，ここでは各設計断面（格点）の間で断面形状や荷重が変化する場合に対応できるように，二次曲線と仮定する場合の公式を示す．

格点 1（始点）の場合

$$w_1 = \frac{\Delta x}{12}(3.5y_1 + 3y_2 - 0.5y_3) \qquad (1.28a)$$

中間格点 r の場合

$$w_r = \frac{\Delta x}{12}(y_{r-1} + 10y_r + y_{r+1}) \qquad (1.28b)$$

格点 n（終点）の場合

$$w_n = \frac{\Delta x}{12}(-0.5y_{n-2} + 3y_{n-1} + 3.5y_n) \qquad (1.28c)$$

1.8　格点荷重を用いた断面力の算出

ここでは，片持梁および単純梁の断面力を格点荷重を用いて算出する．

1.8.1　片持梁

（1）構造モデル

構造モデルは，長さ 40.0 m の片持梁とする（図 -1.22）．

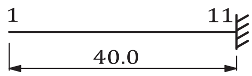


図 -1.22　構造モデル

（2）荷重モデル

荷重モデルは，等分布荷重 1.0 kN/m とする（図 -1.23）．

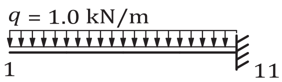


図 -1.23　荷重モデル

（3）格点荷重への変換

ここでは，荷重分布を直線と仮定する．格点荷重への変換を表 -1.4 に，格点荷重への変換結果を図 -1.24 に示す．

表 -1.4　格点荷重への変換

格点	荷重強度 y (kN/m)	格点荷重の計算 $2y_1+y_2$	$y_{r-1}+4y_r+y_{r+1}$	$y_{n-1}+2y_n$	$\frac{\Delta x}{6}$	求める格点荷重 w_r (kN)
1	1.0	3.0	——	——	0.667	2.0
2	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
3	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
4	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
5	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
6	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
7	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
8	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
9	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
10	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
11	1.0	——	——	3.0	0.667	2.0
計	——	——	——	——	——	40.0

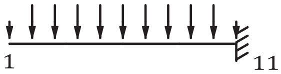


図 -1.24　格点荷重

(4) 格点荷重を用いた断面力の算出

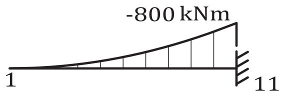
片持梁の場合，反力は自明であり，計算する必要はない．格点（集中）荷重によるせん断力は $S_r = S_{r-1} - w_r$，曲げモーメントは $M_r = M_{r-1} + S_{r-1}\,\Delta x_r$ により計算できる．

断面力の計算を表-1.5 に，せん断力を図-1.25（a），曲げモーメントを図-1.25（b）に示す．

表-1.5　断面力の計算

格点	格点荷重 w_r（kN）	反力 R（kN）	せん断力 $S_r = S_{r-1} - w_r$（kN）	区間長 Δx_r（m）	曲げモーメント $M_r = M_{r-1} + S_{r-1}\Delta x_r$（kNm）
1	2.0	0	-2.0	0	0
2	4.0	——	-6.0	4.0	-8
3	4.0	——	-10.0	4.0	-32
4	4.0	——	-14.0	4.0	-72
5	4.0	——	-18.0	4.0	-128
6	4.0	——	-22.0	4.0	-200
7	4.0	——	-26.0	4.0	-288
8	4.0	——	-30.0	4.0	-392
9	4.0	——	-34.0	4.0	-512
10	4.0	——	-38.0	4.0	-648
11	2.0	40.0	——	4.0	-800
計	40.0	40.0	——	40.0	——

（a）　せん断力



（b）　曲げモーメント

図-1.25　断面力

1.8.2　単純梁

(1) 構造モデル

支間 40.0 m の単純梁を構造モデルとする（図-1.26）．

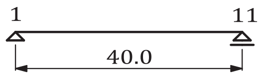


図-1.26　構造モデル

(2) 荷重モデル

荷重モデルは，三角形分布荷重 0 ～ 10.0 kN/m とする（図-1.27）．

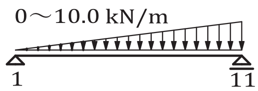


図-1.27　荷重モデル

(3) 格点荷重への変換

ここでは，荷重分布を直線と仮定する．格点荷重への変換を表-1.6 に，格点荷重への変換結果を図-1.28 に示す．

表-1.6　格点荷重への変換

格点	荷重強度 y（kN/m）	格点荷重の計算				求める格点荷重 w_r（kN）
		$2y_1 + y_2$	$y_{r-1} + 4y_r + y_{r+1}$	$y_{n-1} + 2y_n$	$\frac{\Delta x}{6}$	
1	0	1.0	——	——	0.667	0.7
2	1.0	——	6.0	——	0.667	4.0
3	2.0	——	12.0	——	0.667	8.0
4	3.0	——	18.0	——	0.667	12.0
5	4.0	——	24.0	——	0.667	16.0
6	5.0	——	30.0	——	0.667	20.0
7	6.0	——	36.0	——	0.667	24.0
8	7.0	——	42.0	——	0.667	28.0
9	8.0	——	48.0	——	0.667	32.0
10	9.0	——	54.0	——	0.667	36.0
11	10.0	——	——	29.0	0.667	19.3
計	——	——	——	——	——	200.0

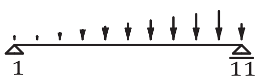


図-1.28　格点荷重

(4) 反力の算出

反力の計算を表 -1.7 に示す.

表 -1.7　反力の計算

格点	格点荷重	区間長	格点1の反力			格点11の反力		
	w_r (kN)	Δx_r (m)	格点11からの距離 x_r (m)	$w_r x_r$ (kNm)	反力 $R_1 = \sum w_r x_r / L$ (kN)	格点1からの距離 x_r (m)	$w_r x_r$ (kNm)	反力 $R_{11} = \sum w_r x_r / L$ (kN)
1	0.7	0	40.0	26.7	——	0	0	——
2	4.0	4.0	36.0	144.0	——	4.0	16.0	——
3	8.0	4.0	32.0	256.0	——	8.0	64.0	——
4	12.0	4.0	28.0	336.0	——	12.0	144.0	——
5	16.0	4.0	24.0	384.0	——	16.0	256.0	——
6	20.0	4.0	20.0	400.0	——	20.0	400.0	——
7	24.0	4.0	16.0	384.0	——	24.0	576.0	——
8	28.0	4.0	12.0	336.0	——	28.0	784.0	——
9	32.0	4.0	8.0	256.0	——	32.0	1 024.0	——
10	36.0	4.0	4.0	144.0	——	36.0	1 296.0	——
11	19.3	4.0	0	0	——	40.0	773.3	——
計	200.0	40.0	——	2666.7	66.7	——	5 333.3	133.3

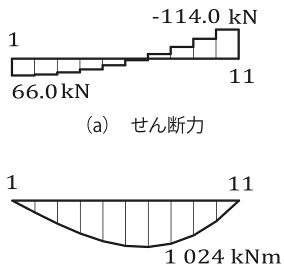
(5) 断面力の算出

格点（集中）荷重によるせん断力は $S_r = S_{r-1} - w_r$ により，曲げモーメントは $M_r = M_{r-1} + S_{r-1}\,\Delta\,x_r$ により算出できる.

断面力の計算を表 -1.8 に，計算結果を図 -1.29（a），図 -1.29（b）に示す.

表 -1.8　断面力の計算

格点	格点荷重 w_r (kN)	反力 R (kN)	せん断力 $S_r = S_{r-1} - w_r$ (kN)	区間長 Δx_r (m)	曲げモーメント $M_r = M_{r-1} + S_{r-1}\Delta x_r$ (kNm)
1	0.7	66.7	66.0	0	0
2	4.0	——	62.0	4.0	264
3	8.0	——	54.0	4.0	512
4	12.0	——	42.0	4.0	728
5	16.0	——	26.0	4.0	896
6	20.0	——	6.0	4.0	1 000
7	24.0	——	-18.0	4.0	1 024
8	28.0	——	-46.0	4.0	952
9	32.0	——	-78.0	4.0	768
10	36.0	——	-114.0	4.0	456
11	19.3	133.3	——	4.0	0
計	200.0	200.0	——	40.0	———



(a)　せん断力

(b)　曲げモーメント

図 -1.29　断面力

表 -1.6（格点荷重），表 -1.7（反力），表 -1.8（断面力）は，この先何度も使うことになる重要な表である．この表を一度作成しておけば，単純桁（梁）はもちろんのこと，連続桁（梁）の断面力計算からプレストレス二次力の計算まで，まったく同じ方法で計算することができる．すなわち，集中荷重による断面力の算出手順さえ理解しておけば，表計算ソフトを用いることで，さまざまな構造の断面力が計算できることになるので，応用の効く構造計算手法が“身に付く”のである．

2章

断面性能

断面力を算出するために構造解析を行う場合，はじめに解析ソフトに部材の断面積や断面二次モーメントを入力しなければならない．また，曲げモーメントから曲げ応力度を算出する際には断面係数も必要になる．これら断面積や断面二次モーメントなどは，総称して断面性能と呼ばれており，設計の初期段階であらかじめ計算しておくことが多い．

断面性能については，四角形や三角形などの解説は一般的であるが，実務で遭遇するさまざまな断面形状の計算方法について ていねいに説明している教科書は少ない．

そこで，本章では現実的な断面に関する断面性能の計算手法について要点を説明することとした．

2.1　断面性能の要点

（1）断面一次モーメント

ある図形の断面積をA，その図心（重心）から与えられた軸までの距離をyとする（図-2.1）と，断面積Aと軸までの距離yの積を断面一次モーメントという．

$$G = A \cdot y \tag{2.1}$$

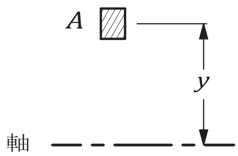


図-2.1　軸・断面積A・距離yの関係

（2）断面二次モーメント

同様に，断面積A（$= b \cdot dy$）と軸までの距離yの2乗の積を断面二次モーメントという．

$$I = A \cdot y^2 \tag{2.2}$$

長方形断面の断面二次モーメントは，図-2.2から以下のようになる．

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} (by^2 \mathrm{d}y) = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} \tag{2.3}$$

$$= b\left[\frac{(h/2)^3}{3}\right] - b\left[\frac{(-h/2)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{b}{3}\frac{h^3}{8} - \frac{b}{3}\frac{(-h)^3}{8} = \frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}$$

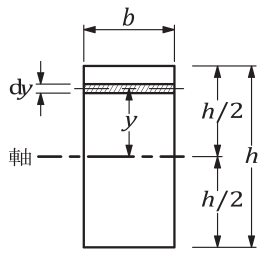


図-2.2　長方形断面の断面二次モーメント

次に，図心軸からeだけ離れた軸に対する断面二次モーメントは，図-2.3により，以下のようになる．

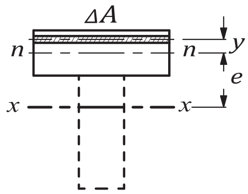


図-2.3　離れた軸に対する断面二次モーメント

$$I_x = \int_A (y+e)^2 \mathrm{d}A \tag{2.4}$$

$$= \int_A (y^2 + 2ye + e^2)\,\mathrm{d}A = \int_A y^2\,\mathrm{d}A + e^2\int_A \mathrm{d}A + 2e\int_A y\mathrm{d}A$$

ここで，$\int_A y^2\mathrm{d}A = I_n \quad \int_A \mathrm{d}A = A \quad \int_A y\mathrm{d}A = G_n = 0$ 　であるので

$$I_x = A \cdot e^2 + I_n \tag{2.5}$$

となる．

2.2　T 形断面

コンクリート橋をはじめとしてさまざまな構造に用いられている一般的な断面である T 形断面について，断面性能を求める．T 形断面の桁を T 桁といい，その一例を図 -2.4 に示す．図 -2.4 の桁は合成桁に用いられるタイプで I 桁とも呼ばれる．

図 -2.4　T 形断面の一例

(1) 断面形状

モデルは, 桁高 3.0 m, 上フランジ幅 3.0 m の T 形断面とする（図 -2.5）.

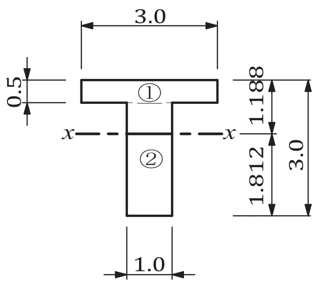


図 -2.5　T 形断面

(2) 断面性能

1）図心軸に関する断面性能を求めなければならないが，T 形断面の図心位置が不明なので，まずはじめに図心を求める．

2）T 形断面を長方形などの計算しやすい形状の要素に分割し，番号を付ける．

3）T 形断面の図心を求めるための表を作成する（表 -2.1）．横方向には, 要素番号, 形状の表示（長方形だけならば不要），幅（b），高さ（h），断面積（A），上縁から当該要素図心までの距離（y_1），$A \cdot y_1$ の欄，A と $A \cdot y_1$ には合計欄を設ける．

表 -2.1　図心の計算

No	形	n	b (m)	h (m)	A (m^2)	y_1 (m)	Ay_1 (m^3)
1	□	1	3.000	0.500	1.5000	0.2500	0.3750
2	□	1	1.000	2.500	2.5000	1.7500	4.3750
計	—	—	——	——	4.0000	——	4.7500

注）n は要素の個数を示す .

4）A 欄の合計が，この T 形断面の断面積 $\sum A$ になる．

5）$A \cdot y_1$ 欄の合計 $\sum A \cdot y_1$ を $\sum A$ で除すると，T 形断面図心の上縁からの位置 y_u が求められる．

$$y_u = \frac{\sum A y_1}{\sum A} = \frac{4.7500}{4.0000} = 1.1875 \quad \mathrm{m}$$

6）図心が求まったので，図心に関する断面性能を計算することができる．表 -2.1 の右側に $A(y_u - y_1)^2$，I_0 の欄を追加する（表 -2.2）．$y_u - y_1$ は，各長方形要素図心位置の T 形断面図心位置からの距離 e である．

ここで，I_0 は各長方形要素の断面二次モーメント $bh^3/12$ である（図 -2.6）．

表 -2.2　断面性能の計算

No	形	n	b (m)	h (m)	A (m^2)	y_1 (m)	Ay_1 (m^3)	$A(y_u - y_1)^2$ (m^4)	I_0 (m^4)
1	□	1	3.000	0.500	1.5000	0.2500	0.3750	1.31836	0.03125
2	□	1	1.000	2.500	2.5000	1.7500	4.3750	0.79102	1.30208
計	—	—	——	——	4.0000	——	4.7500	2.10938	1.33333

注）n は要素の個数を示す．

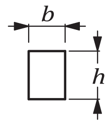


図 -2.6　長方形の b と h

7）$A(y_u - y_1)^2$ と I_0 の欄には合計欄を設ける．

8）求める T 形断面の断面二次モーメントは，

$$I = \sum A(y_u - y_1)^2 + \sum I_0 = 2.10938 + 1.33333 = 3.4427 \quad \mathrm{m}^4$$

9）T 形断面図心の下縁からの位置 y_l は，桁高 H から y_u を差し引いて負号とし，

$$y_l = -(H - y_u) = -(3.000 - 1.1875) = -1.8125 \quad \mathrm{m}$$

10）T 形断面上縁・下縁の断面係数は，断面二次モーメントを T 形断面上縁および下縁から T 形断面図心位置までの距離 y_u および y_l で除して求める．

$$Z_u = \frac{I}{y_u} = \frac{3.4427}{1.1875} = 2.8991 \ \ \mathrm{m}^3$$

$$Z_l = \frac{I}{y_l} = \frac{3.4427}{-1.8125} = -1.8994 \ \ \mathrm{m}^3$$

2.3　箱形断面

箱形断面を有する桁を箱桁といい，その一例を図 -2.7 に示す．図 -2.7 の桁は特殊なプレキャスト桁であり，かなりウェブ幅が大きくなっている．箱形断面の断面性能を計算するためには，T 形断面の場合と同様に，まず箱形断面の図心を求めることから始める．


図 -2.7　箱形断面の一例

(1) 断面形状

コンクリート橋によく用いられる箱形断面をモデルとする（図 -2.8）．

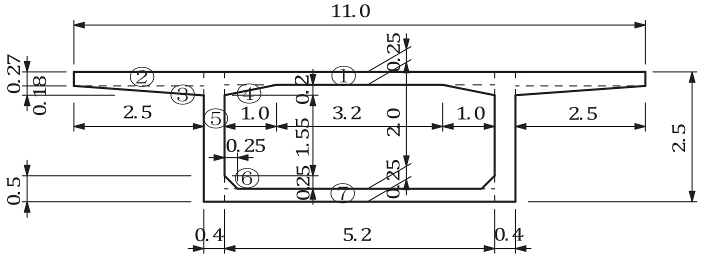


図 -2.8　箱形断面

(2) 断面性能

1) 図心軸に関する断面性能を求めなければならないが，箱形断面の図心位置が不明なので，まずはじめに図心を求める.

2) 箱形断面を長方形など計算しやすい形状の要素に分割し，番号を付ける.

3) 箱形断面の図心を求めるための表を作成する（表 -2.3）．横方向には, 要素番号, 形状の表示（長方形だけならば不要)，同一形状の要素の数（n），幅（b），高さ（h），断面積（A），上縁から当該要素図心までの距離（y_1），$A \cdot y_1$ の欄，A と $A \cdot y_1$ には，合計欄を設ける.

表 -2.3　図心の計算

No	形	n	b (m)	h (m)	A (m^2)	y_1 (m)	Ay_1 (m^3)
1	□	1	5.200	0.250	1.3000	0.1250	0.1625
2	□	2	2.500	0.270	1.3500	0.1350	0.1823
3	▽	2	2.500	0.180	0.4500	0.3300	0.1485
4	▽	2	1.000	0.200	0.2000	0.3167	0.0633
5	□	2	0.400	2.500	2.0000	1.2500	2.5000
6	△	2	0.250	0.250	0.0625	2.1667	0.1354
7	□	1	5.200	0.250	1.3000	2.3750	3.0875
計	—	—	——	——	6.6625	——	6.2795

注）n は要素の個数を示す.

4) A 欄の合計が，この箱形断面の断面積 $\sum A$ になる.

5) $A \cdot y_1$ 欄の合計 $\sum A \cdot y_1$ を $\sum A$ で除すると，箱形断面図心の上縁からの位置 y_u が求められる.

$$y_u = \frac{\sum A \cdot y_1}{\sum A} = \frac{6.2795}{6.6625} = 0.9425 \quad \text{m}$$

6) 図心が求まったので，図心に関する断面性能を計算することができる.

表 -2.3 の右側に $A(y_u - y_1)^2$，I_0 の欄を追加する（表 -2.4）．$y_u - y_1$ は，各長方形要素図心位置の箱形断面図心位置からの距離である.

ここで，I_0 は長方形および三角形の断面二次モーメントである（図 -2.9）．同一要素が n 個ある場合は，n 倍する.

長方形　$I_0 = \dfrac{bh^3}{12}$　(2.6a)

三角形　$I_0 = \dfrac{bh^3}{36}$　(2.6b)

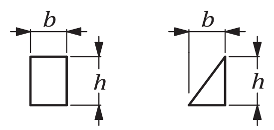


図 -2.9　長方形・三角形の b と h

表 -2.4　断面性能の計算

No	形	n	b (m)	h (m)	A (m^2)	y_1 (m)	Ay_1 (m^3)	$A(y_u-y_1)^2$ (m^4)	I_0 (m^4)
1	□	1	5.200	0.250	1.3000	0.1250	0.1625	0.86883	0.00677
2	□	2	2.500	0.270	1.3500	0.1350	0.1823	0.88031	0.00820
3	▽	2	2.500	0.180	0.4500	0.3300	0.1485	0.16883	0.00081
4	▽	2	1.000	0.200	0.2000	0.3167	0.0633	0.07833	0.00044
5	□	2	0.400	2.500	2.0000	1.2500	2.5000	0.18909	1.04167
6	△	2	0.250	0.250	0.0625	2.1667	0.1354	0.09366	0.00022
7	□	1	5.200	0.250	1.3000	2.3750	3.0875	2.66762	0.00677
計	—	—	——	——	6.6625	——	6.2795	4.94667	1.06488

注）n は要素の個数を示す．

7）$A(y_u - y_1)^2$ と I_0 の欄には，合計欄を設ける．

8）求める箱形断面の断面二次モーメントは，

$$I = \sum A(y_u - y_l)^2 + \sum I_0 = 4.94667 + 1.06488 = 6.01155 \quad \mathrm{m}^4$$

9）箱形断面図心の下縁からの位置 y_l は，桁高 H から y_u を差し引いて負号とし，

$$y_l = -(H - y_u) = -(2.500 - 0.9425) = -1.5575 \quad \mathrm{m}$$

10）箱形断面上縁・下縁の断面係数は，断面二次モーメントを箱形断面上縁および下縁から T 形断面図心位置までの距離 y_u および y_l で除して求める．

$$Z_u = \frac{I}{y_u} = \frac{6.01155}{0.9425} = 6.37820 \quad \mathrm{m}^3$$

$$Z_l = \frac{I}{y_l} = \frac{6.01155}{-1.5575} = -3.85978 \quad \mathrm{m}^3$$