

第1章

波浪の統計的性質と 発生機構

海の波には、風が発生原因である**波浪** (waves), 強い海底地震が発生原因で周期が数分以上の**津波** (a tsunami), 台風による強風と低気圧が原因で周期が数時間の**高潮** (a storm surge), 天体の運行が原因で周期が半日と1日の**潮汐波** (tidal waves) などがあるが、ここでは波浪の統計的性質と発生理論、および予測法について説明する。なお、波浪は、周期が0.1秒以下の**さざ波** (ripples), 周期が0.1～30秒以下の**風波** (wind waves) とうねり (swells), そして、**長周期重力波** (long-period gravity waves, infragravity waves) と呼ばれる周期が30秒～数分の成分波から成る。

1.1 波浪の統計的性質

1) 規則波の基本的表現と合成

(1) 規則波の基本的表現

図-1.1 に示す規則波の場合、山から山までの長さを**波長** (L , wavelength, a wavelength), 山から谷までの水面高を**波高** (H , wave height, a wave height) と定義し、静水面からの水面上昇高（水面高） η を次の余弦関数で表すことが出来る。

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \frac{H}{2} \cos(\kappa x) \quad (1.1.1)$$

ここに、 x は水平座標であり、 $\kappa=2\pi/L$ は**波数** (a wave number) と呼ばれる。

さらに、**図-1.1**において、波が通過して次の波が来るまでの時間、すなわち、一波長が通過する時間を**周期** (T) と定義し、 x 方向に進行する波を次式で表すことが出来る。

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{H}{2} \cos(\kappa x - \omega t) = \frac{H}{2} \cos \kappa(x - ct) \quad (1.1.2)$$

ここに、 t は時間であり、 $\omega=2\pi/T$ は**角周波数** (an angular frequency) または**角振動数**、 $c=L/T=\omega/\kappa$ は**波の伝播速度** (wave velocity) または**波速** (wave celerity) と呼ばれる。

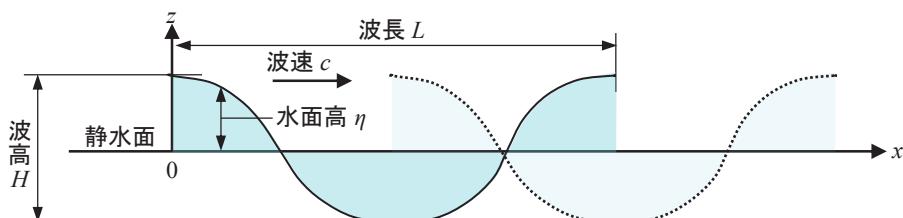


図-1.1 波形の定義

(2) 規則波の合成

簡単のために波数を無視して、波高 H_1 で周期 T_1 の規則波と、波高 H_2 で周期 T_2 の規則波の合成を考える。この場合の静水面からの水面上昇高（水面高） η は次式で表される。

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{H_1}{2} \cos \frac{2\pi}{T_1} t + \frac{H_2}{2} \cos \frac{2\pi}{T_2} t = (H_+ + H_-) \cos(T_+ + T_-) + (H_+ - H_-) \cos(T_+ - T_-) \\ &= H_+ [\cos(T_+ + T_-) + \cos(T_+ - T_-)] + H_- [\cos(T_+ + T_-) - \cos(T_+ - T_-)]\end{aligned}\quad (1.1.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ここに, } H_+ = \frac{H_1/2 + H_2/2}{2}, \quad H_- = \frac{H_1/2 - H_2/2}{2} \\ \quad T_+ = \frac{2\pi/T_1 + 2\pi/T_2}{2}, \quad T_- = \frac{2\pi/T_1 - 2\pi/T_2}{2} \end{array} \right\} \quad (1.1.4)$$

さらに、加法定理を用いると、式 (1.1.3) は次式の様になる。

$$\begin{aligned}\eta &= H_+ (\cos T_+ \cos T_- - \sin T_+ \sin T_- + \cos T_+ \cos T_- + \sin T_+ \sin T_-) \\ &\quad + H_- (\cos T_+ \cos T_- - \sin T_+ \sin T_- - \cos T_+ \cos T_- - \sin T_+ \sin T_-) \\ &= 2H_+ \cos T_+ \cos T_- - 2H_- [\cos(T_+ - T_-) - \cos T_+ \cos T_-] \\ &= (2H_+ + 2H_-) \cos T_+ \cos T_- - 2H_- \cos(T_+ - T_-)\end{aligned}\quad (1.1.5)$$

そして、式 (1.1.5) に式 (1.1.4) を代入し直すと、式 (1.1.6) を得る。

$$\eta = H_1 \cos \left[\frac{2\pi}{2T_1 T_2 / (T_2 - T_1)} t \right] \cos \left[\frac{2\pi}{2T_1 T_2 / (T_2 + T_1)} t \right] - \frac{H_1 - H_2}{2} \cos \frac{2\pi}{T_2} t \quad (1.1.6)$$

波高 4.0m で周期 12.0 s の規則波と、波高 2.0m で周期 8.0 s の規則波の合成結果を図-1.2 に、波高 4.0 m で周期 12.0 s の規則波と、波高 2.0 m で周期 10.9 s の規則波の合成結果を図-1.3 に示す。規則波を合成させると、図-1.2 に示されるように不規則性を増すが、周期の差が小さい規則波を合成させると、式 (1.1.6) の右辺一番目の余弦関数の周期 $[2T_1 T_2 / (T_2 - T_1)]$ が長周期になるため、図-1.3 に示されるようにビート波（唸っている波）になる。

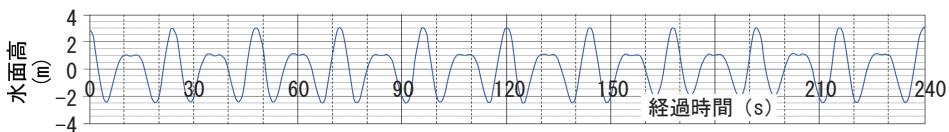


図-1.2 合成波の例（周期 12.0 s と周期 8.0 s の 2 つの規則波の場合）

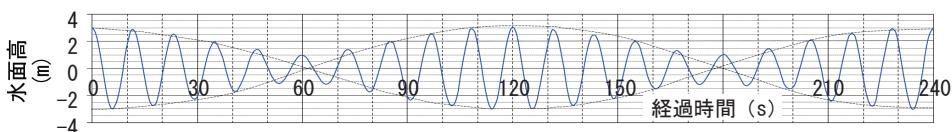


図-1.3 合成波の例（周期 12.0 s と周期 10.9 s の 2 つの規則波の場合）

2) 不規則波と波群性

実際の海の波浪は規則波でなく、図-1.4に示すような不規則波であり、小さな波から徐々に大きな波になって、再び小さな波に戻る10波前後の連なりを有しているのが普通である。この性質を**波群性**（wave groupiness）と呼び、港湾や浮遊構造物の共振、傾斜堤の捨石・ブロックの安定性、汀線付近の平均水面変動や波の打上げ・越波などの問題に影響を及ぼすことが分っている。

波の数え方は、規則波ならば、山から山、または、谷から谷を一波と定義して問題無いが、実際の波浪の場合は、図-1.4の左端から5・6番目の二山の様に、この定義では、水面高 η が一波の中で静水面（図-1.4の水面高0mの平面）を横切らない波が出来るために、水面高 η が静水面を横切って上昇し、再び静水面を横切って上昇するまでを一波と定義するゼロアップ・クロス法か、水面高 η が静水面を横切って下降し、再び静水面を横切って下降するまでを一波と定義するゼロダウン・クロス法を用いて行われる。国際的には、ゼロダウン・クロス法も多用されているが、我が国では、ゼロアップ・クロス法が主流である。

この不規則波の取扱いには、**波別解析法**と**スペクトル解析法**の2つがある。

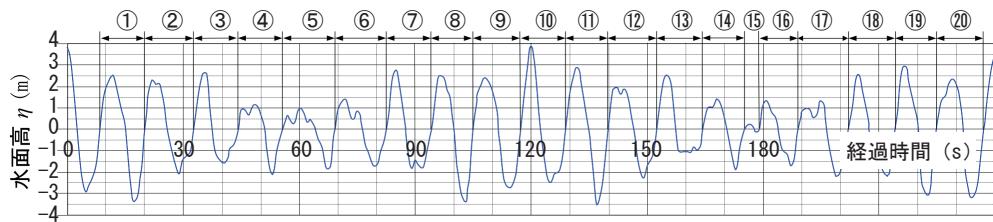


図-1.4 海の波浪の模擬波形とゼロアップ・クロス法による波の数え方

3) 波別解析法による取扱い

波の定常性を確保するため、20分間程度の連続記録（波数で200波程度）を用いて、1波ごとの波高や周期などの出現確率の分布を扱う方法を**波別解析法**と呼び、非線形性の強い波浪にも適応できる。

水面高 η の出現確率密度の分布は、平均値が0で、分散が1の場合の正規分布（a normal distribution, Gaussian distribution）に従い、式(1.1.7)で表される。

$$p\left(\eta/\sigma_\eta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\sigma_\eta}\right)^2\right\} \quad (1.1.7)$$

読者にとって分かりにくい次の数式表現について、ここで解説しておく。

$$y = A \times \exp\{B\} \quad (\text{a. 1})$$

この式は、ネイピア数 ($e = 2.71828182\dots$) を用いた次の式と同じである。

$$y = A \times e^B \quad (\text{a. 2})$$

ここで、指数 B が複雑な式の場合、式 (a. 2) の表現では、指数部が読みにくくなるため、 $\exp\{B\}$ の表現を採用する。

ここに、 σ_η は水面高 η の標準偏差で、データ数 n を用いて式 (1.1.8) で定義される。

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i^2}{n}} \quad (1.1.8)$$

そして、Longuet-Higgins [1] によると、波高 H の出現確率密度の分布は、図-1.5 に例を示すレイリー分布 (Rayleigh distribution) に従い、式 (1.1.9) で表される。

$$p(H) = \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left\{-\frac{1}{8}\left(\frac{H}{\sigma_\eta}\right)^2\right\}, \quad p\left(\frac{H}{\bar{H}}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{H}{\bar{H}^2} \exp\left\{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^2\right\} \quad (1.1.9)$$

さらに、ある波高 H より大きな波高が出現する確率 (超過発生確率) は、式 (1.1.9) を H から ∞ にかけて積分すればよいので、式 (1.1.10) で求まる。

$$P(H) = \int_H^\infty p(H) dH = \exp\left\{-\frac{1}{8}\left(\frac{H}{\sigma_\eta}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^2\right\} \quad (1.1.10)$$

ここに、 \bar{H} は次式で表される平均波高である。

$$\bar{H} = \frac{\int_0^\infty H \cdot p(H) dH}{\int_0^\infty p(H) dH} = \sqrt{2\pi}\sigma_\eta \quad (1.1.11)$$

(1) 1/3 最大波と有義波

図-1.5 に示す様に、測定波 n 個の中から、波高の大きい順に $n/3$ 個を選んで、これらの波高と周期を各々算術平均した値を 1/3 最大波高 (the highest one-third

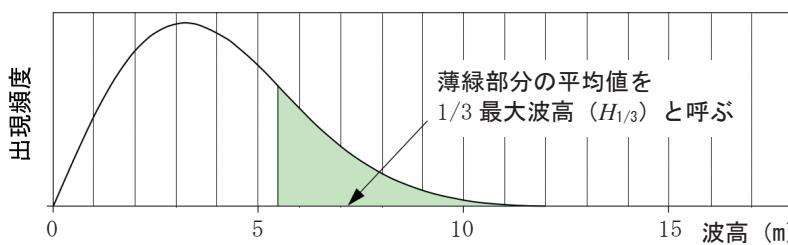


図-1.5 波高のレイリー分布の例と有義波高の説明

wave height; $H_{1/3}$) と 1/3 最大周期 (the highest one-third wave period; $T_{1/3}$) と呼び, この波を 1/3 最大波 (the highest one-third wave) と呼ぶ. これらの値は, 人間が目視観測で得た測定値の平均にほぼ等しいこと (人間が目視観測する場合, 半分以上の小さな波を見逃していることを意味する) から, 各々**有義波高** (the significant wave height; H_s), **有義周期** (the significant wave period; T_s), および, **有義波** (the significant wave) とも呼んでおり, 実際の波浪に対して単に波高, 周期と呼ぶときは, 有義波のそれらを指していて, 各種検討で多用されている.

有義波高と平均波高の関係は, レイリード分布の仮定の下, 次の様になる.

$$H_{1/3} = H_s = 1.597 \dots \times \bar{H} \doteq 1.60 \times \bar{H} \quad (1.1.12)$$

(2) 1/10 最大波

波高の大きい順に $n/10$ 個を選んで, これらの波高と周期を各々算術平均した値を 1/10 最大波高 ($H_{1/10}$) と 1/10 最大周期 ($T_{1/10}$) と呼び, この波を 1/10 最大波と呼ぶ. 1/10 最大波高と有義波高, および, 平均波高との関係は, レイリード分布の仮定の下, 次の様になる.

$$H_{1/10} \doteq 1.271 \times H_s \doteq 2.031 \times \bar{H} \quad (1.1.13)$$

(3) 最高波

波高が最大の波を**最高波** (the highest wave) と呼び (最大波とも呼ばれているが, 1/10 最大波などと混同されるので, 避けた方が良い), これの波高と周期を各々**最高波高** (H_{\max}), **最高周期** (T_{\max}) と呼び, 港湾構造物や海洋構造物の設計に用いる.

最高波高と有義波高の関係は, これらの比の度数分布の最多値として式 (1.1.14), 度数分布の平均値として式 (1.1.15) の様になる.

$$\text{最多値の場合 : } \frac{H_{\max}}{H_{1/3}} \doteq 0.706 \sqrt{\ln(n)} \quad (1.1.14)$$

$$\text{平均値の場合 : } \frac{H_{\max}}{H_{1/3}} \doteq 0.706 \left\{ \sqrt{\ln(n)} + \frac{r}{2\sqrt{\ln(n)}} \right\} \quad (1.1.15)$$

ここに, r はオイラーの定数 ($= 0.5772$, Euler's constant) である.

式 (1.1.14) や式 (1.1.15) から, 港湾構造物の場合は, 波数 n として 600 個相当を採用している.

$$\text{港湾構造物の場合 : } H_{\max} = 1.8 \times H_{1/3} \quad (1.1.16)$$

さらに, 海洋構造物の場合は, 波数 n として 3,000 個相当を採用している.

$$\text{海洋構造物の場合 : } H_{\max} = 2.0 \times H_{1/3} \quad (1.1.17)$$

(4) 平均波

全測定波を算術平均した平均波高 (\bar{H}) と平均周期 (\bar{T}) は式 (1.1.18) で求められる.

$$\bar{H} = \frac{\sum_{i=1}^n H_i}{n}, \quad \bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} \quad (1.1.18)$$

また、全測定波高の二乗値を算術平均した値の平方根は、波高の二乗平均平方根 (H_{rms}) と呼ばれ、式 (1.1.19) で定義される。波浪エネルギーは波高の二乗に比例することから、波浪エネルギーに注目する検討の場合に用いられる。

$$H_{rms} = \sqrt{\bar{H}^2} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty H^2 \cdot p(H) dH}{\int_0^\infty p(H) dH}} = \sqrt{8} \sigma_\eta = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \bar{H} \quad (1.1.19)$$

(5) 周期の分布

Bretschneider [2] によると、風波の周期 T の出現確率密度の分布は、式 (1.1.20) で表される。

$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{\bar{T}^4} \exp\left\{-0.675\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right\} \quad (1.1.20)$$

しかし、風波とうねりの合成など、ピークが 2 つある周期分布が顕著になる場合もあり、波高の場合の様な一般形は無い。それゆえ、実測データの解析から、次の様に見なされる。

$$T_{max} \doteq T_{1/10} \doteq T_{1/3} \doteq (1.1 \sim 1.2) \bar{T} \quad (1.1.21)$$

4) スペクトル解析法による取扱い

波高 (4 m~0.4 m) と周期 (12 s~3 s) から成る規則波 (成分波 1~5) を重ね合わせた図-1.6 に示す例のように、規則波を合成することで、波群性を有する不規則波を作り出せる。この様に、不規則波を様々な波高と周期を持った成分波の合成と考え、光のスペクトルと類似の概念から、各成分波が持つエネルギーの周波数上の分布で不規則波を表す方法を、スペクトル解析法 (the spectral analysis method) と呼び、線形波に適用出来る。

(1) 周波数スペクトル

海の波浪を多様な波高と周期を有する成分波 (規則波) の重ね合せで考え、各々の成分波の持つエネルギーを周波数の関数として表したもの **周波数スペクトル** (a frequency spectrum) と呼ぶ。



図-1.6 規則波の合成による不規則波の表現

不規則波の水面高 η を式 (1.1.22) に示す無数の規則波の合成で表す.

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(2\pi f_i t + \varepsilon_i) \quad (1.1.22)$$

ここに, a_i , f_i , ε_i は i 番目の成分波の振幅 ($=H/2$), 周波数, および, 位相であり, 各成分波の振幅は小さく, 成分波間の相互干渉は無く, 位相はランダムに分布していると仮定する.

そして, 第2.1節で解説する微小振幅波理論から, i 番目の成分波 (規則波) の単位面積当りの全エネルギー $E(f_i)$ [$\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2 \times \text{m}/\text{m}^2 = \text{N} \times \text{m}/\text{m}^2$] は式 (1.1.23) で表される.

$$E(f_i) = \frac{1}{8} \rho g H_i^2 = \frac{1}{2} \rho g a_i^2 \quad (1.1.23)$$

それゆえ, 周波数 f から $f+df$ 間の成分波の全エネルギーの程度を次式で表す.

$$\sum_{i=f}^{f+df} \frac{1}{2} a_i^2 = S(f) df \quad (1.1.24)$$

ここに, $S(f)$ は, 単位 [$\text{m}^2 \cdot \text{s}$] で表された, 周波数 f に対応した単位周波数当りの波エネルギーの程度と言え, 周波数エネルギースペクトル密度関数 (a frequency energy spectral density function), 略して周波数スペクトルと呼ぶ.

(2) 周波数スペクトルと代表波の関係

不規則波の平均エネルギー \bar{E} は、水面高 η の経時変化データを用いて、式(1.1.25)から求められる。

$$\bar{E} = \rho g \frac{\int_0^{T_{term}} \eta^2 dt}{T_{term}} = \rho g \bar{\eta^2} = \rho g \sigma_\eta^2 \quad (1.1.25)$$

ここに、 ρ は海水の密度、 g は重力加速度、 T_{term} は水面高の観測時間、 σ_η は水面高の標準偏差である。

式(1.1.23)、式(1.1.24)と式(1.1.25)を比較すれば、波の周波数スペクトルを全周波数に渡って積分し、 ρg を掛けると、式(1.1.25)に等しくなることが分かる。それゆえ、次式を得る。

$$\bar{\eta^2} = \sigma_\eta^2 = \int_0^\infty S(f) df \quad (1.1.26)$$

すなわち、周波数スペクトルが分かれれば、式(1.1.26)から水面高の標準偏差が求まり、式(1.1.11)～式(1.1.17)および式(1.1.19)から各種代表波の波高を求められる。

さらに、平均周波数 \bar{f} と平均周期 \bar{T} は次の様に定義される。

$$\bar{f} = \left[\frac{\int_0^\infty f^2 S(f) df}{\int_0^\infty S(f) df} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (1.1.27)$$

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (1.1.28)$$

ここに、 m_0 は f に対する 0 次モーメント $\left(= \int_0^\infty S(f) df\right)$ であり、 m_2 は f に対する 2 次モーメント $\left(= \int_0^\infty f^2 S(f) df\right)$ である。

ただし、波高データから求まる平均周期は、式(1.1.28)から求まる値の 1.2 倍になる。

また、波高がレイリー分布に従うならば、式(1.1.11)、式(1.1.12)、および、式(1.1.26)から、次の関係式を得る。周波数スペクトルの分布が求まれば、本式から有義波高を求められる。

$$H_{1/3} \doteq 4.004 \sqrt{\int_0^\infty S(f) df} = 4.004 \sqrt{\bar{\eta^2}} = 4.004 \eta_{rms} \quad (1.1.29)$$

ここで、 η_{rms} は水面高の二乗平均平方根を意味する。

(3) 代表的な周波数スペクトル

風が吹き続けると、風からエネルギーが水面近くの水塊に供給され、さざ波から波高と周期の大きな波へ発達する。この波の発達に係わる重要な物理量は、水面でのせん断力の大きさを支配する風速以外に、吹き続ける時間と距離が長くなるほど波の発達に繋がることから、吹送時間 (duration time) と吹送距離 (fetch) である。

ある吹送距離で、風波が定常状態まで発達するために必要な時間を最小吹送時間と呼ぶが、これ以降では、最小吹送時間に達しているものとして解説する。

(a) 光易Ⅱ型周波数スペクトル

光易 [3] は実験と実測データを用いて、有限吹送距離での風波の周波数スペクトル [$\text{m}^2 \cdot \text{s}$] を次の様に表した。これを光易Ⅱ型周波数スペクトル (the Mitsuyasu Type II frequency spectrum) と呼ぶ。

$$S(f) = 0.000858g^2 f^{-5} \left(\frac{gF}{u_*^2} \right)^{-0.312} \times \exp \left\{ -1.25 \left(\frac{gF}{u_*^2} \right)^{-1.32} \left(\frac{u_* f}{g} \right)^{-4} \right\} \quad (1.1.30)$$

ここに、 g は重力加速度、 f は周波数、 F は吹送距離、 u_* は摩擦速度で式 (1.1.31) から求まる。

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{r_{10}^2 \rho_a U_{10}^2}{\rho_a}} = \sqrt{r_{10}^2} U_{10} \quad (1.1.31)$$

ここに、 τ は風による水面でのせん断力、 ρ_a は空気の密度、 r_{10}^2 は摩擦係数 (U_{10} が 15 m/s 以上の場合、 $r_{10}^2 \approx 0.0026$)、 U_{10} は海面上 10 m の平均風速である。

光易Ⅱ型周波数スペクトルの分布例を図-1.7 に示す。吹送距離が長くなるほど、波のエネルギーが大きくなる（波高が大きくなる）と共に、エネルギーがピークになる周波数（ピーク周波数と呼ぶ）が小さくなる。すなわち、ピークの周期が長くなる。

(b) ブレットシュナイダー・光易周波数スペクトル

光易 [3] の式 (1.1.30) を、ピーク周波数 f_p と有義周期との関係式 (1.1.32)，および、前出の式 (1.1.29) を用いて、設定が容易な有義波高と有義周期から周波数スペクトル [$\text{m}^2 \cdot \text{s}$] を求められるように書き直したのが、式 (1.1.33) である。

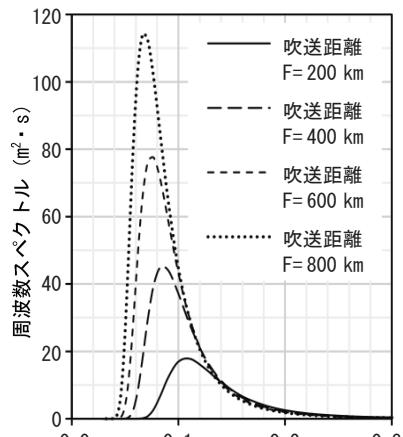


図-1.7 光易Ⅱ型周波数スペクトルの例
(10 m 上空の風速が 15 m/s の場合)

$$T_{1/3} = \frac{1}{1.05 f_p} \quad (1.1.32)$$

$$S(f) = 0.258 H_{1/3}^2 \left(T_{1/3}^{-4} f^{-5} \right) \times \exp \left\{ -1.03 (T_{1/3} f)^{-4} \right\} \quad (1.1.33)$$

式 (1.1.33) は、Bretschneider [4] が提案した有限吹送距離での風波の周波数スペクトルの式と一致することから、**ブレットシュナイダー・光易周波数スペクトル** (the Bretschneider-Mitsuyasu frequency spectrum) と呼ばれ、有義波高 7 m, 有義周期 14 s の場合の例を図-1.8 に示す。

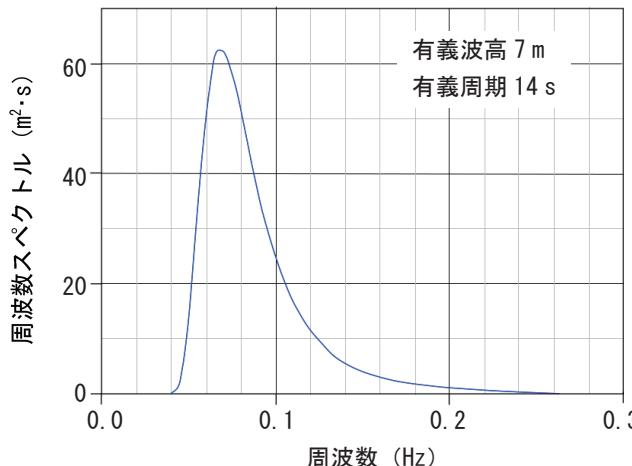


図-1.8 ブレットシュナイダー・光易周波数スペクトルの例

(c) ピアソン・モスコビッチ周波数スペクトル

風波の波高と周期は、一定風速の下、吹送距離の増加と共に大きくなるが、やがて碎波などによるエネルギー損失と、低周波数側から高周波数側へのエネルギー非線形伝達によって、風から供給されるエネルギーとの間でエネルギー平衡状態になる。Pierson and Moskovitz [5] は、北大西洋での観測データを用いて、十分に発達してエネルギー平衡状態になった風波の周波数スペクトル [m²·s] を次式で表した。

$$S(f) = \frac{0.00810}{(2\pi)^4} g^2 f^{-5} \times \exp \left\{ -0.74 \left(\frac{g}{2\pi U_{19.5} f} \right)^4 \right\} \quad (1.1.34)$$

ここに、 $U_{19.5}$ は海面上 19.5 m 上空の平均風速であり、式 (1.1.35) を用いて求められる。

$$U(z) = U_{10} \left(1 + 5.75 \sqrt{r_{10}^2} \log \frac{z}{10} \right) \quad (1.1.35)$$

ここに, z は海面上の高さ [m], U_{10} は $z = 10 \text{ m}$ での風速, r_{10}^2 は摩擦係数 (U_{10} が 15 m/s 以上の場合, $r_{10}^2 \approx 0.0026$) である.

式(1.1.34)は、ピアソン・モスクビッチ周波数スペクトル (the Pierson-Moskovitz frequency spectrum) と呼ばれ、海面上 19.5 m 上空の風速が 21 m/s の場合の例を **図-1.9** に示す.

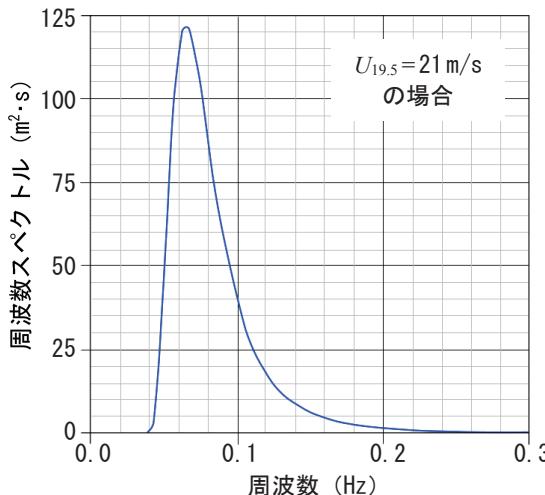


図-1.9 ピアソン・モスクビッチ周波数スペクトルの例

(d) 合田による修正ジョンスワップ周波数スペクトル

Hasselmann et al. [6] は、北海で観測された波浪データを用いて、JONSWAP 周波数スペクトルと呼ばれる風波に対するスペクトル密度関数を提案したが、合田 [7] は不規則波数値シミュレーション結果を踏まえて、設定が容易な有義波高と有義周期で周波数スペクトル [$\text{m}^2 \cdot \text{s}$] を表せる式 (1.1.36) を提案した. 本式は、式中のスペクトルの先鋭度を表す指標 γ を選ぶことで、広範囲のスペクトル形状に使用でき、十分に発達した風波に対しては $\gamma=1$ を、数千 km 伝播したうねりに対しては $\gamma=10$ を選べば良い.

$$S(f) = \frac{0.06238(1.094 - 0.01915 \times \ln \gamma) \gamma^\alpha}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \times H_{1/3}^2 T_p^{-4} f^{-5} \times \exp \left\{ -1.25 (T_p f)^{-4} \right\} \quad (1.1.36)$$

ここに、 α は式 (1.1.37) から求まる指数、 T_p は式 (1.1.38) から求まるピーク周期、 β は式 (1.1.39) で設定できる係数で、 f_p はピーク周波数 (T_p の逆数) である.

$$\alpha = \exp \left\{ \frac{-(T_p f - 1)^2}{2\beta^2} \right\} \quad (1.1.37)$$

$$T_p = \frac{T_{1/3}}{1 - 0.132(\gamma + 0.2)^{-0.559}} \quad (1.1.38)$$

$$\beta = \begin{cases} 0.07 & : f \leq f_p \\ 0.09 & : f \geq f_p \end{cases} \quad (1.1.39)$$

式(1.1.36)は、**修正ジョンスワップ周波数スペクトル** (the Modified JONSWAP frequency spectrum) と呼ばれ、有義波高 7 m、有義周期 14 s の場合の例を図-1.10 に示す。

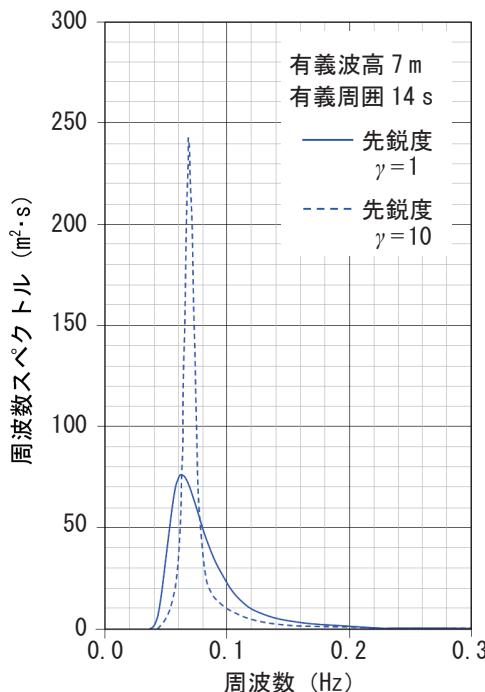


図-1.10 修正ジョンスワップ周波数スペクトルの例

(e) 二山ピークの周波数スペクトル

風波とうねりが共存するため、ピークが二つある周波数スペクトルになる場合がある。この場合は、一山ピークの広範囲のスペクトル形状に適用できる修正ジョンスワップ周波数スペクトルや、Huang et al. [7] が提案したワロップス周波数スペクトル (the Wallops frequency spectrum) を用いて、風波とうねりの周波数スペクトルを各々求め、線形的に重ね合せることにより表現出来る。実施例には種本ら [8] や Ochi and Hubble [9] の研究がある。

(4) 方向スペクトル

実際の波浪は、波高と周期だけでなく、波向についても異なる成分波を合成したものになる。それゆえ、波浪の持つエネルギー（波高の二乗に比例する）を周波数

と波向の関数として表したものとを波浪の方向スペクトル (a directional spectrum) と呼ぶ。

この方向スペクトルは、式 (1.1.40) に示す様に、前出の周波数スペクトル $S(f)$ と波向角 θ 方向の分布状況を表す方向分布関数 $G(f, \theta)$ の積で定義できる。

$$S(f, \theta) = S(f) \times G(f, \theta) \quad (1.1.40)$$

方向分布関数については、Arthur [10] など幾つかの研究があるが、ここでは Longuet-Higgins et al. [11] が提案し、光易 [12] が補強した方向分布関数を紹介する。

方向分布関数は次元を持たず、式 (1.1.41) を満足するように決定する必要があり、Longuet-Higgins et al. [11] が、外洋で観測したデータから、式 (1.1.42) を提案した。

$$\int_0^{2\pi} G(f, \theta) d\theta = 1 \quad (1.1.41)$$

$$G(f, \theta) = G_0 \cos^{2S} \frac{\theta}{2} \quad (1.1.42)$$

ここに、 S はエネルギー方向分布の集中度を表すパラメータ、 G_0 は $G(f, \theta)$ を正規化するために式 (1.1.43) で定義される係数であり、 $\theta_{\min} \sim \theta_{\max}$ が $-\pi \sim +\pi$ の場合は、式 (1.1.44) になる。

$$G_0 = \left\{ \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \right\}^{-1} \quad (1.1.43)$$

$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2S-1} \frac{\{\Gamma(S+1)\}^2}{\Gamma(2S+1)} \quad (1.1.44)$$

ここに、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

そして、光易ら [12] は、実測データを用いて式 (1.1.42) の妥当性を確認すると共に、エネルギー方向分布の集中度パラメータ S を求めるために次式を提案した。

$$S \doteq \begin{cases} 14 f_{p*}^{-6.7} f_*^4 & (f_* \leq f_{p*}) \\ 14 f_*^{-2.7} & (f_* > f_{p*}) \end{cases} \quad (1.1.45)$$

ここに、 f_* は式 (1.1.46) で定義される無次元周波数、 f_{p*} は式 (1.1.47) で定義される無次元ピーク周波数である。

$$f_* = \frac{2\pi f U_{10}}{g} \quad (1.1.46)$$

$$f_{p*} = \frac{2\pi f_p U_{10}}{g} \doteq 18.8 \times \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{-0.330} \quad (1.1.47)$$

ここに, U_{10} は海面上 10 m の平均風速, F は吹送距離である.

さらに, 合田・鈴木 [13] は, エネルギー方向分布の集中度パラメータ S を, 周波数, ピーク周波数, および, 光易らの実測データから求められた式 (1.1.48) で定義される集中度パラメータの最大値 S_{\max} で表す式 (1.1.49) を提案した. ここで, ピーク周波数 f_p は, 有義周期を用いて式 (1.1.50) から求められる.

式 (1.1.42), 式 (1.1.44), および, 式 (1.1.48)～式 (1.1.50) から求まる方向分布関数を, 光易型方向分布関数と呼び, 有義波高 7 m, 有義周期 14 s で, S_{\max} が 25 の場合の例を図-1.11 に示す.

$$S_{\max} = 11.5 \left(\frac{2\pi f_p U_{10}}{g} \right)^{-2.5} \quad (1.1.48)$$

$$S = \begin{cases} S_{\max} \times (f/f_p)^5 & (f \leq f_p) \\ S_{\max} \times (f/f_p)^{-2.5} & (f > f_p) \end{cases} \quad (1.1.49)$$

$$f_p = \frac{1}{1.05 T_{1/3}} \quad (1.1.50)$$

式 (1.1.48) の精度は十分に確認されておらず, 対象波に対する適切な U_{10} の設定も簡単でないことから, 合田は, 集中度パラメータの最大値 S_{\max} として, 次の値を使うことを推薦している.

- ❖ 風波の場合 ----- 10
- ❖ 減衰距離の短いうねりの場合 (波形勾配が比較的大きい) -- 25
- ❖ 減衰距離の長いうねりの場合 (波形勾配が比較的小さい) -- 75

—— 周期 7 s (周波数 0.143 Hz)
 - - - - 周期 14 s (周波数 0.071 Hz)
 - - - 周期 21 s (周波数 0.048 Hz)

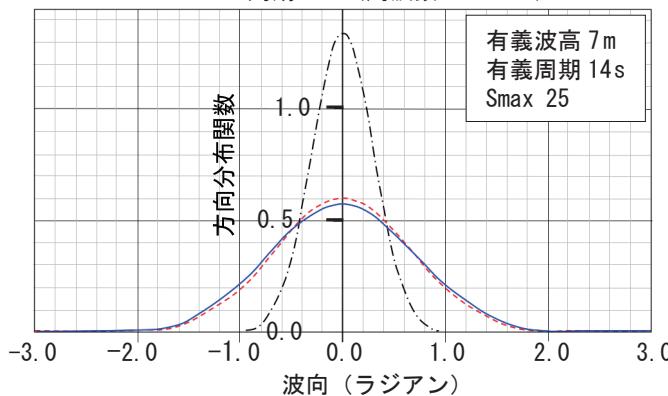


図-1.11 光易型方向分布関数の例

また、合田・鈴木が求めた集中度パラメータの最大値と波形勾配との関係を図-1.12に、同最大値と相対水深との関係を図-1.13（図中の α_{po} は沖側の等深線に対する不規則波の卓越入射角であり、 $(S_{max})_o$ は沖側の等深線での集中度パラメータの最大値である）に示す。

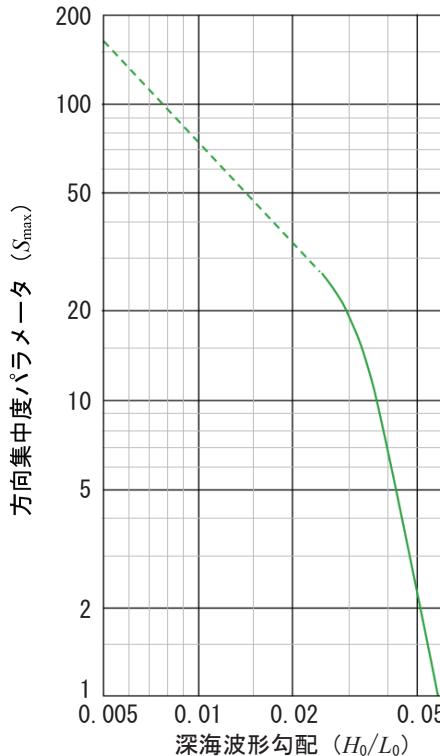
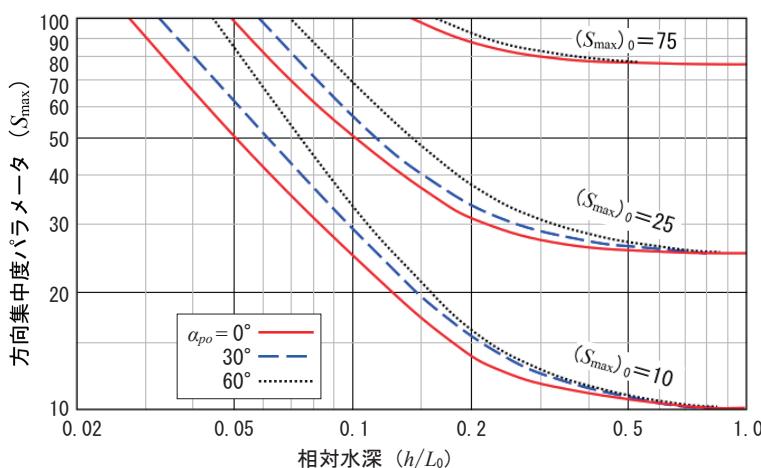


図-1.12 方向集中度パラメータと波形勾配との関係（合田・鈴木 [13] より）



※図中の α_{po} は沖側の等深線に対する不規則波の卓越入射角であり、 $(S_{max})_o$ は沖側の等深線での集中度パラメータの最大値である。

図-1.13 方向集中度パラメータと相対水深との関係（合田・鈴木 [13] より）

1.2 波浪の発生機構

1) 波浪の発生理論の基礎

乱流状態である風の圧力変動によって微小な海面変動が発生し、これの伝播速度が風の圧力変動の移動速度と一致する場合に波となり、風からのエネルギー供給が続くと、波はさざ波から大きな風波へ発達するが、さらに発達すると波峰付近から崩れ始め、エネルギーの一部を失うものの、風からの供給エネルギーと碎波による損失エネルギーが釣合うようになり、平衡状態に達する。そして、波が風域から出るか、風が弱まることで、エネルギー供給量が減ってくると、風波の短周期成分が水の粘性効果により減衰し、相対的に波長の長いうねりと呼ぶ波浪になる。このうねりは減衰しにくいことから、遠方まで到達可能である。

実際の波浪は、小さな波から大きな波になり、再び小さな波になる、波群と呼ばれる現象を数十秒～数百秒の周期で繰り返している不規則波であるから、波浪のエネルギーは波群の伝播速度で輸送されるため、波浪エネルギーと波群の伝播速度を用いたエネルギー保存式を立てられる。そして、Hasselmann [14] などは、波高の発生・発達・減衰を追跡する目的のために、波浪のエネルギーを方向スペクトルに置き換えたエネルギー平衡方程式を提案した。基本的な形は次のようになる。

$$\frac{\partial S(f, \theta)}{\partial t} + \frac{\partial [S(f, \theta) \times C_{gx}]}{\partial x} + \frac{\partial [S(f, \theta) \times C_{gy}]}{\partial y} = S_E \quad (1.2.1)$$

ここに、 $S(f, \theta)$ は波浪の方向スペクトル [$\text{m}^2 \cdot \text{s}$]、 t は時間、 C_{gx} と C_{gy} は波群の伝播速度の x と y 方向成分 [m/s]、 x と y は岸沖方向と沿岸方向の水平距離、 S_E はエネルギーの供給・消散を表す関数 [m^2] であり、風から波へのエネルギー供給量を S_m で、波浪の成分波間の非線形相互作用によるエネルギーの輸送量を S_{nl} で、そして、碎波などによるエネルギー消散量を S_{ds} で表せば、近似的に次式のように書ける。

$$S_E = S_m + S_{nl} + S_{ds} \quad (1.2.2)$$

光易 [15] や土木学会研究現況レビュー小委員会 [16] などを参考に、式(1.2.2)の S_E 項を適切な評価式で表して、波浪のエネルギー分布を求め、さらに、波浪のエネルギーと有義波高との関係式を用いれば、発達・減衰する波高分布を求めることが出来る。

(1) エネルギー供給量

風から波へのエネルギー供給量 S_{in} については、次の理論が良く知られている。

(a) Phillips [17] の共鳴理論（風波の発生理論）

水面の上昇部で負圧、水面の下降部で正圧となる条件下で、乱流状態になっている風の圧力変動によって発生した微小な海面変動の伝播速度が、風の圧力変動の移動速度と一致する場合に、その海面変動が波浪として成長する。本理論は風波の発生を説明するためには重要であるが、これによるエネルギー量は非常に小さく、風波の発達を説明するためには、次の理論が必要である。

(b) Miles [18, 19] のせん断流理論（風波の発達理論）

海面に波が現れるようになると、波面上の気流が水面波によって乱されて不安定を生じ、圧力は海面の風上側で高く、風下側で低くなり、波浪を風下側へ押す。この様にして風のエネルギーが波浪へ効率的に供給される。

これらの定式化に関する研究は多数あり、ここに代表的な表現式を示す。

$$S_{jn} = C_a + C_b \left(u_*/C \right)^2 \omega \times S(f, \theta) \quad (1.2.3)$$

ここで、右辺第1項の C_a は Phillips の共鳴理論による線形的な波の発達を表す。右辺第2項は Miles の理論によるせん断力に比例する項で、 C_b は比例係数 (0.05 前後)、 u_* は風の摩擦速度、 C は波速、 ω は角周波数である。

(2) 非線形相互作用によるエネルギーの輸送量

波浪は、波群性を有する不規則波であるから、波高、波数、および、角周波数が異なる規則波（成分波）を重ね合わせることで近似できる（線形近似）。しかし、波浪の近似精度を高めたいならば、成分波間の非線形相互作用によるエネルギー交換を無視できない。この波浪の成分波間の非線形相互作用によるエネルギーの輸送量 S_{nl} を、最初に理論的に表したのは Hasselmann [20] で、次のようにある。

$$S_{nl}(\vec{\kappa}_4) = \omega_4 \times \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2, \vec{\kappa}_3, \vec{\kappa}_4) \times \delta(\vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}_2 - \vec{\kappa}_3 - \vec{\kappa}_4) \cdot \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\vec{\kappa}_1 d\vec{\kappa}_2 d\vec{\kappa}_3 \quad (1.2.4)$$

ここに、 ω は角周波数、 $\vec{\kappa}$ は波数ベクトル（成分波の進行方向角 θ を用いれば、 x 方向成分は $\kappa \cos \theta$ 、 y 方向成分は $\kappa \sin \theta$ ）であり、 F はスペクトル成分の結合係数を表す積分核関数、 δ は共鳴条件に対応するデルタ関数、 N [= $S(\vec{\kappa})/\omega$: $S(\vec{\kappa})$ は波数ベクトルで表した方向スペクトル] は “wave action density” と呼ばれ、添え字は4組の成分波を示す。

深海域（水深／波長が 1/2 以上の場合）や浅海域（水深／波長が 1/2～1/25 の場合）では、4組の成分波の干渉がエネルギー発達に影響する。波のエネルギーは干渉により低周波数側と高周波数側へ移行し、白波によって高周波数側のエネルギーが散逸するため、エネルギーのピーク周波数が低周波数側へ移動するのである。こ

れの計算は膨大な計算時間を要するため、近似的な計算法が工夫されている。さらに、極浅海域（水深／波長が 1/25 以下の場合）では、3 波共鳴によるエネルギー遷移（波のエネルギーが低周波数側から高周波数側へ輸送される）が波の発達や減衰に大きな影響を与えるようになる。例えば、一山型スペクトル波が岸に近づくと多山型スペクトルに変わったりする。

(3) エネルギー消散量

エネルギー消散量 S_{ds} は、風波の峰部が白く崩れる現象（白波碎波と呼ぶ）、海底面との摩擦、および、水深が浅くなることによる碎波現象などによるエネルギー消散から成る。

白波碎波によるエネルギー消散量 S_{wc} の例として、Komen et al. [21] によって改良された式(1.2.5)を、海底摩擦によるエネルギー消散量 S_{bf} の例として、Hasselmann and Collins [22] の式を簡単化し、JONSWAP の観測結果で比例係数を決定した式(1.2.6)を、以下に紹介する。この場合の全エネルギー消散量は、これら 2 つの量の和 ($S_{ds} = S_{wc} + S_{bf}$) となる。

$$\left. \begin{aligned} S_{wc} &= -C_1 \left[\left(1 - C_2 \right) + C_2 \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} \right] \left(\frac{\tilde{\kappa} \sqrt{S_T}}{0.05496} \right)^{C_3} \tilde{\omega} \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} \times S(f, \theta) \\ \tilde{\omega} &= \left[\frac{\iint S(f, \theta) \omega^{-1} df d\theta}{S_T} \right]^{-1} \\ \tilde{\kappa} &= \left[\frac{\iint S(f, \theta) \kappa^{-0.5} df d\theta}{S_T} \right]^{-2} \\ S_T &= \iint S(f, \theta) df d\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

$$S_{bf} = -C_f \left(\frac{\omega}{g \sinh \kappa d} \right)^2 \times S(f, \theta) \quad (1.2.6)$$

ここに、 C_1 、 C_2 、 C_3 は方向スペクトルの平衡が保たれるように与える調整係数、 κ は波数、 $\tilde{\kappa}$ は平均波数、 S_T は波の全方向スペクトル、 $\tilde{\omega}$ は平均角周波数、 ω は角周波数、 C_f は底面摩擦係数、 d は水深である。

風データに基づいて、波高、周期、波向の分布状況を推定することを **波浪推算** (wave prediction) と呼ぶ。水平二方向 (x, y) の運動方程式および連続式を用いて、広域の長時間の波浪推算を行う正攻法は、計算負荷が非常に大きくなるため、波浪の方向スペクトルを用いたエネルギー平衡方程式を解く方法が普及しており、主要な数値計算モデルに MRI, WAM, WAVEWATCH, SWAN などがある。また、有義波法と呼ばれる、経験式や算定図に基づく SMB 法やウィルソン法などの簡易手法もあり、以下に解説する。

2) 波浪推算モデル

波浪予報は、船舶の安全で経済的な運航、漁船の安全な操業、海域での各種工事やレジャー活動などに必要不可欠であり、世界中で実施されている。我が国でも、気象庁が北西太平洋や日本沿岸の24時間波浪予想図のファクシミリ放送を行うと共に、予想に用いた数値データを情報提供している。

波浪予報では、先に風分布の予測を行い、次に波浪推算モデルを用いて波浪分布の経時変化を予測する。この波浪推算法は、有義波法とスペクトル法に大別される。

- ① **有義波法**は、算定図か算定式に風速、吹送距離、吹送時間を与えて、有義波高と有義波周期を求める手法であり、無次元化したパラメータより有義波諸元を求めることから、パラメータ法とも呼ばれる。風波とうねりが混在する場合や、風が急変するとか、地形や気圧分布が複雑な場合には適当でない。
- ② **スペクトル法**は、方向スペクトルを用いた波浪のエネルギー平衡方程式を解くことで、波浪の発生・発達・伝播・減衰を計算する方法であり、有義波法に比べて計算負荷が大きいため、高性能コンピュータによる数値計算モデルとなるが、物理的意味合いが明確であり、複雑な分布状態の場合でも対応できる。

(1) 風分布の予測法

波浪推算を行う場合、外力である風分布を事前に予測する必要がある。日本全体の沿岸域の風分布については、気象庁が大気の乱流運動方程式を解く数値計算モデルを用いて、24時間予測結果を提供している。

ここでは、天気図から予測を試みる場合の簡易計算法を紹介する。

(a) 傾度風と海面上の風との関係

風は気圧の高い位置から低い位置へ吹くことから、気圧の変化率（これ以降、気圧傾度と呼ぶ）が大きいほど風速は速くなる。この場合の風向は、高気圧側から低気圧側へ等圧線に直交する。さらに、地球は自転していることから、Coriolis力（北半球での風向を右側へ偏向させる）を考慮する必要があり、この力と気圧傾度による力が釣合った状態で生じる風を**地衡風**（geostrophic wind, a geostrophic wind）と呼ぶ。

しかし、等圧線は曲線状である場合が一般的であるから、遠心力も考慮する必要があり、これら3つの力が釣合った状態で生じる風を**傾度風**（gradient wind, a gradient wind）と呼び、傾度風の風速 U_{gr} は式(1.2.7)で表される。また、傾度風の風向は、Coriolis力と遠心力の影響で、等圧線に沿って吹くようになる。

$$U_{gr} = \frac{f_{cl}r}{2} \left[-1 + \sqrt{1 \pm \left(\frac{4}{\rho_a f_{cl}^2 r} \frac{dp}{dr} \right)} \right] \quad (1.2.7)$$

ここに, f_{cl} は Coriolis 係数 [$= 2 \times$ 地球の自転角速度 $\times \sin$ (緯度), 地球の自転角速度 $= 7.292 \times 10^{-5}$ rad/s], r は等圧線の曲率半径, ρ_a は大気の密度 (1.1×10^{-3} g/cm³), dp/dr は気圧傾度力であり, 記号 (±) は, 低気圧の場合は+, 高気圧の場合は-を用いることを意味する.

波浪推算に必要な海面上 10 m の平均風速 U_{10} は, 主に海面との摩擦抵抗力によって, 式 (1.2.7) の計算値より低くなる. また, 海面上の風向 α も, 三次元的な吹出し・吸込み現象によって, 図-1.14 に示すように, 等圧線から一定の交角となる吹出し角, または, 吸込み角を有する. 高橋 [23] の研究によると, 風速比 U_{10}/U_{gr} と風向 α は表-1.1 の様になる.

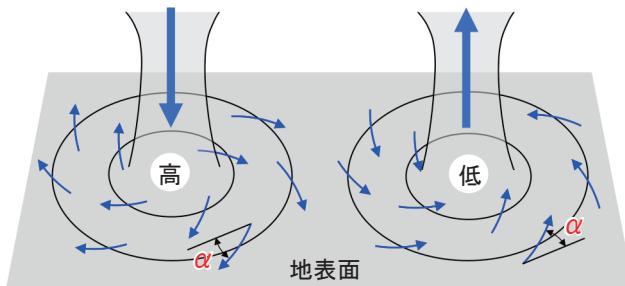


図-1.14 北半球での風の高気圧からの吹出しと低気圧への吸込みの説明

表-1.1 傾度風と海面上の風との関係

緯度 (度)	10	20	30	40	50
等圧線の接線に平行な直線からの吹出し・吸込み角 α (度)	24	20	18	17	15
U_{10}/U_{gr}	0.51	0.60	0.64	0.67	0.70

(b) 台風時の風分布

台風域内では, 等圧線が同心円の様になり, 台風の中心に向かって気圧が下がっているため, 気圧分布の定式化が比較的容易であることから, 台風域内の気圧分布式が複数提案してきた. ここでは, 我が国で良く使われる Fujita [24] の式 (1.2.8) と, Myers [25] の式 (1.2.9) とを紹介する.

$$p = p_a - \frac{\Delta p}{\sqrt{1 + (r/r_0)^2}} \quad (1.2.8)$$

$$p = p_a - \Delta p \left[1 - \exp \left(-\frac{r_0}{r} \right) \right] \quad (1.2.9)$$

ここに, P_a は大気圧 (=1013 hpa), Δp は台風中心での気圧降下量, r_0 は台風中心から風速が最大となる位置までの距離, r は台風中心から対象位置までの直線距離で

ある。

式 (1.2.8), または, 式 (1.2.9) から求まる気圧傾度力を式 (1.2.7) へ代入し, 表-1.1 の U_{10}/U_{gr} を使えば, 台風域内の海面上での風速を求められ, 表-1.1 の吹込み角を使えば, 海面上の風向も設定できる。さらに, これらの台風の風速と風向に, 台風の移動速度 (ただし, 海面との摩擦抵抗力などによる低減を考慮する) をベクトル合成すれば, 波浪推算に必要な風情報を得たことになる。

なお, 図-1.15 に示す様に, 台風中心の右側では, 風の吹き込み方向と台風の移動方向が同じであるから, 風の勢いが強く**危険半円**と呼ばれる。一方, 台風中心の左側では, 風の吹き込み方向と台風の移動方向が逆であるから, 風の勢いが弱く**可航半円**と呼ばれる。

台風の気圧分布が橜円分布になっている場合には, 野中ら [26] の次式が使える。

$$p = p_c + \Delta p \times \exp \left\{ \frac{-1}{\sqrt{(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2}} \right\} \quad (1.2.10)$$

ここに, p_c は台風中心での気圧 ($=P_a - \Delta p$), x と y は直交座標での台風中心から対象位置までの二方向距離, α と β は橜円分布の長軸と短軸を調整するための係数 (長さの次元を有する) である。

(2) 有義波法

有義波法の基礎は第二次世界大戦中に築かれ, 1944 年 6 月の連合軍のノルマンディー上陸作戦などで重要な役割を果たした。数値計算モデルが普及した現在でも, 数値計算結果の妥当性チェックや特定の地点の波浪を簡単に予測するためには有効である。

(a) 風波の推算法その 1 (SMB 法)

風データから有義波諸元を推算できる算定図表を, Sverdrup and Munk [27] が第二次大戦中に開発し戦後の 1947 年に公開した。さらに, Bretschneider [28, 29] が改良を加えたので, 彼らの頭文字を取って SMB 法と呼ばれるようになった。その後, Bretschneider [30] が風波領域の有義波高 $H_{1/3}$ と有義波周期 $T_{1/3}$ を求められる式 (1.2.11) と式 (1.2.12) を提案した。また, 最小吹送時間 t_{min} は式 (1.2.13) で定義される。

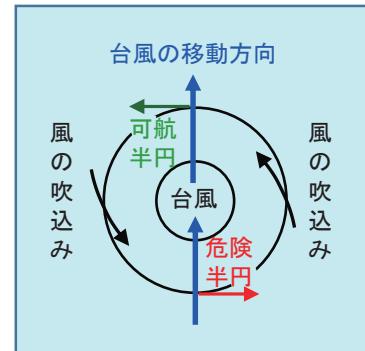


図-1.15 台風の吹込みと移動方向との関係

$$\frac{gH_{1/3}}{U_{10}^2} = 0.283 \tanh \left\{ 0.0125 \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{0.42} \right\} \quad (1.2.11)$$

$$\frac{gT_{1/3}}{2\pi U_{10}} = 1.20 \tanh \left\{ 0.077 \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{0.25} \right\} \quad (1.2.12)$$

$$t_{\min} = \int_0^F \left(\frac{1}{C_g} \right) dx = \int_0^F \frac{4\pi}{g T_{1/3}} dx \quad (1.2.13)$$

ここに, g は重力加速度, U_{10} は海面上 10m の平均風速, F は吹送距離, C_g は波群の伝播速度である.

式 (1.2.11)～式 (1.2.13) の式を用いて作られた風波推算図を図-1.16 に示す. 本図の使い方は, 風速 U_{10} と吹送距離 F を算定図にプロットして求めた有義波高および有義波周期と, 風速 U_{10} と吹送時間 t を算定図にプロットして求めたそれらとを比較して, より小さい方を選べば良い.

式 (1.2.11) と式 (1.2.12) の $\tanh\{x\}$ は, 双曲線関数の一種である.

この双曲線関数とは, 変数 x に対応して, 指数関数 e^x を用いた下記のような合成関数であり, 下図に示すような曲線になる.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (b.1)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (b.2)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (b.3)$$

また, 双曲線関数を微分すると, 次の様になる.

$$\frac{d \cosh(x)}{dx} = \sinh(x) \quad (b.4)$$

$$\frac{d \sinh(x)}{dx} = \cosh(x) \quad (b.5)$$

$$\frac{d \tanh(x)}{dx} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad (b.6)$$

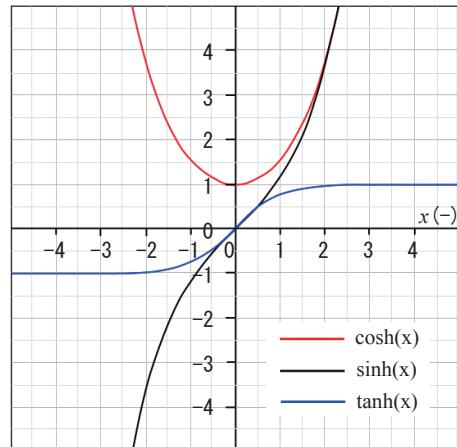


図-b.1 双曲線関数のグラフ

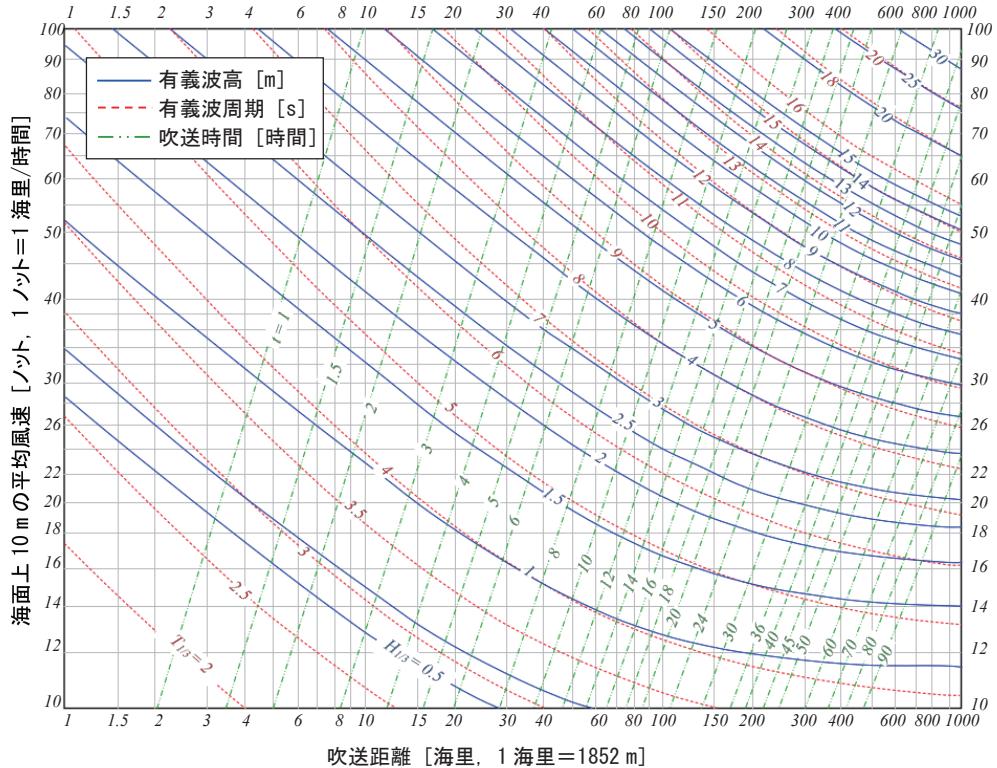


図-1.16 Bretschneider [30] に基づく風波推算図

(b) 風波の推算法その2（ウィルソン法）

Wilson [31] も海面上 10 m の平均風速と吹送距離から風波領域の有義波諸元を求められる式を提案しており、簡易算定法として良く用いられている。なお、最小吹送時間 t_{\min} は式 (1.2.13) から求められる。

$$\frac{gH_{1/3}}{U_{10}^2} = 0.30 \left[1 - \left\{ 1 + 0.004 \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{1/2} \right\}^{-2} \right] \quad (1.2.14)$$

$$\frac{gT_{1/3}}{2\pi U_{10}} = 1.37 \left[1 - \left\{ 1 + 0.008 \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{1/3} \right\}^{-5} \right] \quad (1.2.15)$$

式 (1.2.13)～式 (1.2.15) の式を用いて作られた風波推算図を図-1.17 に示す図-1.16 と比較して、波高の推算値はほぼ同程度になるが、周期の推算値は Wilson の推算図の方が小さくなる傾向にある。本図の使い方は図-1.16 同じで、風速 U_{10} と吹送距離 F から求めた有義波高および有義波周期と、風速 U_{10} と吹送時間 t から求めたそれらとを比較して、より小さい方を選ぶことになる。

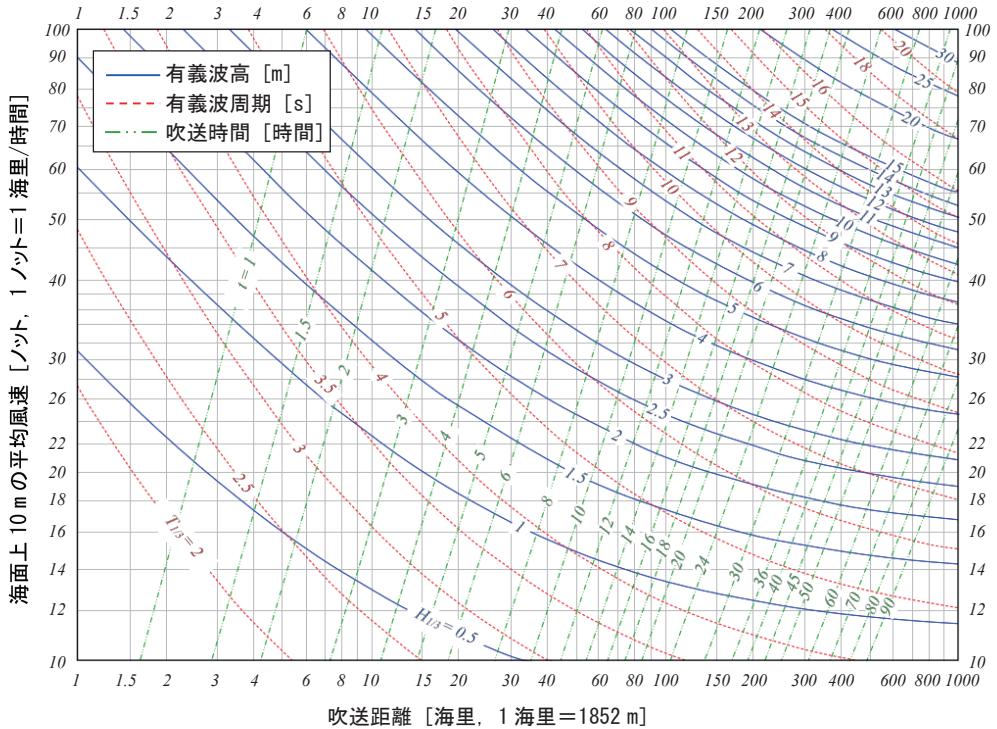


図-1.17 Wilson [31]に基づく風波推算図

なお、合田 [32, 33] は Wilson の式を基に次の関係式を求め、推算図を用いない簡易推算法を提案している。

$$t_{\min} = F^{0.73} U_{10}^{-0.46} \quad \text{または} \quad F_{\min} = t^{1.37} U_{10}^{0.63} \quad (1.2.16)$$

$$T_{1/3} = 3.3 \times H_{1/3}^{0.63} \quad (1.2.17)$$

ただし、式 (1.2.16)において、 t と t_{\min} は時間単位の吹送時間と最小吹送時間、 F と F_{\min} は km 単位の吹送距離と最小吹送距離、 U_{10} は m/s 単位の海面上 10 m での平均風速であり、式 (1.2.17)において、 $T_{1/3}$ は秒単位の有義波周期、 $H_{1/3}$ は m 単位の有義波高であるから単位に注意する必要がある。そして、計算手順は次の通りである：

- ① まず、風域を決めて、 U_{10} [m/s]、 F [km] および t [時間] を設定する。
- ② 次に、式 (1.2.16) の第 2 式から最小吹送距離 F_{\min} を求め、 $F > F_{\min}$ ならば、波浪の発達は吹送時間で規定されるので、吹送距離に F_{\min} を用いて式 (1.2.14) から有義波高を、式 (1.2.15) から有義波周期を求める。
- ③ 逆に、 $F < F_{\min}$ ならば、波浪の発達は吹送距離で規定されるので、吹送距離に F を用いて式 (1.2.14) から有義波高を、式 (1.2.15) から有義波周期を求める。なお、有義波周期は、先に求めた有義波高を用いて、式 (1.2.17) から求めることも出来る。

(c) 浅海域での風波推算法（ブレットシュナイダー法）

Bretschneider [34] は、海底による摩擦抵抗や、波浪の圧力変動の海底浸透による発達抑制効果を無視できない浅海域での風波の推算図を提供している。図-1.18 は水深が一定の場合、図-1.19 は海底勾配が 1/200～1/500 の場合である。

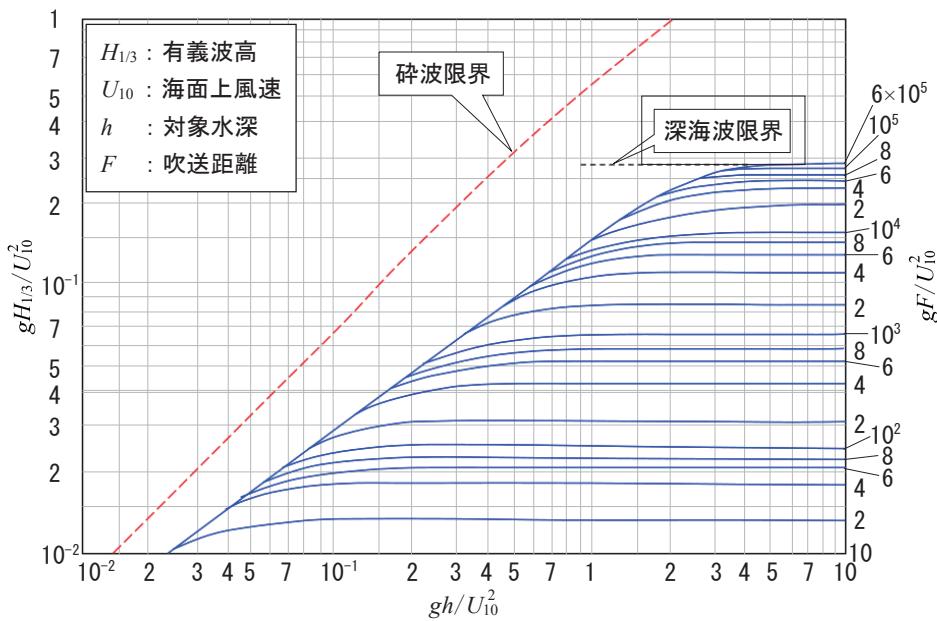


図-1.18 Bretschneider [34] に基づく浅海域での風波推算図（水深一定）

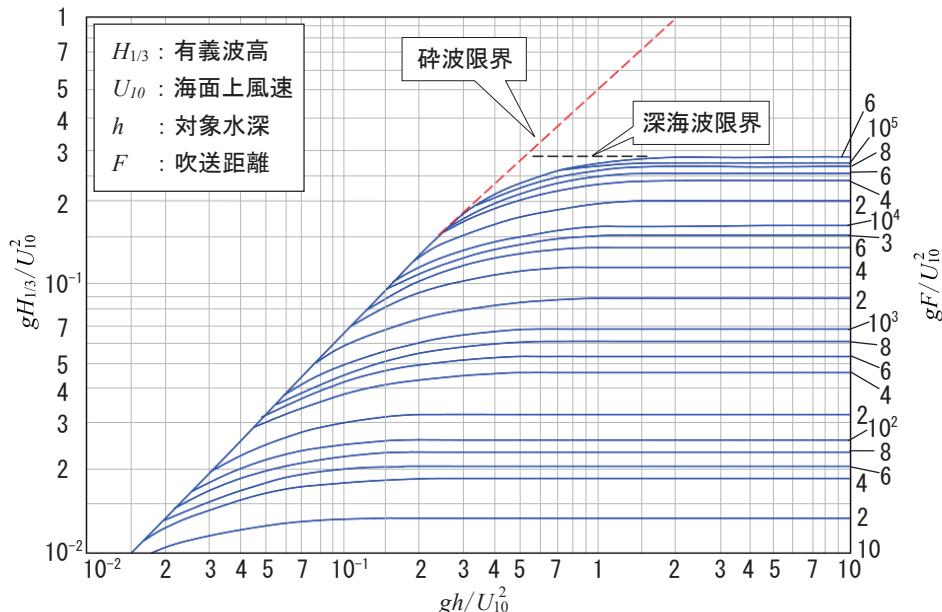


図-1.19 Bretschneider [34] に基づく浅海域での風波推算図
(海底勾配1/200～1/500)

海面上 10 m の平均風速 U_{10} と、対象海域の水深 h と、対象地点までの吹送距離 F を各図に当てはめることで、有義波高を求められる。ここで、海底摩擦係数 f として、実測値との比較から 0.01 が妥当であるとしている。

ただし、浅海域では、第 2 章で解説する水深が変化することによる浅水変形や碎波を生じる可能性が高いので、求められた有義波高に対して、これらによる補正を加えなくてはいけない。また、これらの図からは有義波高しか求まらないので、有義波周期は次式から求める。

$$T_{1/3} = 3.86 \times \sqrt{H_{1/3}} \quad (1.2.18)$$

(d) うねりの推算法

波浪が風域から出て、風からエネルギーを供給されなくなると、風波はうねりとなつて伝播する。Sverdrup and Munk [27] は、風域を出た波浪がうねりとして、大気の抵抗によりエネルギーを失い有義波高 $H_{1/3}$ を減衰させる一方で、短周期成分から減衰していくため、有義波周期 $T_{1/3}$ が長くなつていく傾向を、式 (1.2.19) によつて表した。また、風域境界からの移動距離 D へのうねり到達時間 t_r を式 (1.2.20) で表した。

$$\frac{T_{1/3}}{T_o} = \left[1 + 0.000595 \frac{D}{g T_o^2} \right]^{1/2}, \quad \frac{H_{1/3}}{H_o} = \left[\frac{T_{1/3}}{T_o} \right]^{-2.65} \quad (1.2.19)$$

$$t_r = \int_F^{F+D} \frac{1}{C_g} dx = 42200 \times \left(\frac{T_{1/3} - T_o}{T_o} \right) T_o \quad (1.2.20)$$

ここに、 T_o と H_o は風域から旅立とうとする境界での有義波周期と有義波高であり、 F は風域内の吹送距離である。

さらに、Bretschneider [35] も風域境界からの移動距離 D での有義波周期 $T_{1/3}$ と有義波高 $H_{1/3}$ を求める式 (1.2.21) を提案した。移動距離 D までの到達時間 t_r は式 (1.2.22) で求められる。

$$\frac{T_{1/3}}{T_o} = \left[2.0 + \frac{H_{1/3}}{H_o} \right]^{1/2}, \quad \frac{H_{1/3}}{H_o} = \left[\frac{0.4 F}{0.4 F + D} \right]^{1/2} \quad (1.2.21)$$

$$t_r = \frac{D}{C_g} = \frac{4\pi D}{g T_{1/3}} \quad (1.2.22)$$

Sverdrup and Munk [27] と Bretschneider [35] の比較のために、風域境界での有義波高と有義波周期が各々 10 m と 12 s、吹送距離が 500 km の場合の計算結果を **図-1.20** に示す。

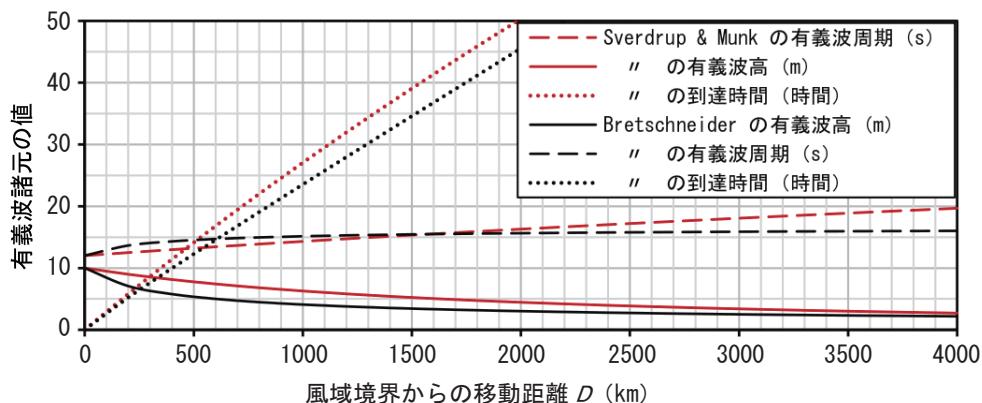


図-1.20 Sverdrup and Munk と Bretschneider の式によるうねりの計算例

(3) スペクトル法

有義波法は取扱いが簡単であるものの、うねりの評価が明確でなく、多方向の波の扱いも曖昧であることから、Pierson, Neumann and James [36] は、Neumannが提案した風速をパラメータに持つ周波数スペクトルと、 \cos 関数の二乗型の方向分布関数から成る方向スペクトルを用いて、波浪推算を行えるPNJ法を開発したが、スペクトル法の信頼性が低い時代であったため、海岸事業関連ではそれほど使われなかった。しかし、スペクトル法は物理的な組立に優れており、その後のコンピュータの性能向上に合わせて、複雑な地形へ適用でき、多成分の方向スペクトルを取り扱えるように、波のエネルギー平衡方程式に波浪の発生・発達・減衰機構を組込んだ本格的な数値計算モデルが次々と発表された。特に、気象庁、ヨーロッパのEuropean Center for Medium Range Weather Forecast (ECMWF)、アメリカのNational Center for Environment Prediction (NCEP)などの公的な気象予報機関から、高精度の海上風などの気象データを容易に入手出来る環境が整備された現在、波浪推算を試みる上で良好な環境が整っていると言える。

有義波法やPNJ法は、一定の風が吹き続けて発達・減衰する波浪を推算することから、エネルギー平衡方程式を一定の風速の下に積分した関係式を解いていることに等しいから、風の場が時々刻々変化している場合の波浪推算に適用するには、本来限界がある。この場合の波浪推算には、エネルギー平衡方程式を解く数値計算モデルを使う方が良く、以下の様な経緯を経て改良されていった。

- ① 第一世代モデル (1960年代から1970年代前半) : エネルギー平衡方程式において、エネルギーの供給・消散関数 S_E として、風から波へのエネルギー供給量 S_{in} と、碎波などによるエネルギー消散量 S_{ds} のみを考慮した数値計算モデルであり、方向スペクトルを構成する成分波が互いに独立して伝播すると見なしているため、

分離伝播モデル (Decoupled Propagation Method) とも呼ばれる。しかし、供給量 S_{in} に実測データから得られた発達係数を採用したことによって、波浪の成分波間の非線形相互作用によるエネルギーの輸送量 S_{nl} を不完全に取り込んでしまっている。その代表例に気象庁のIsozaki and Uji [37] のMRIモデルがある。

- ② 第二世代モデル（1970年代から1980年代前半）：波浪の成分波間の非線形相互作用によるエネルギーの輸送量 S_{nl} が、波の発達過程で大きな影響を持っていることが明らかになった。それゆえ、供給量 S_{in} と消散量 S_{ds} に加えて、風波のスペクトルの相似性を利用し、いくつかのパラメータによって風波のスペクトル変動を記述することで、非線形相互作用によるエネルギーの輸送を間接的に考慮出来るようにしたが、うねり成分に対してはパラメータ表示出来ないため分離伝播モデルを用いた、**結合ハイブリッドモデル** (Coupled Hybrid Model) が現れた。気象庁のMRI-IIが、このモデルの代表例である。さらに、風波成分とうねり成分に分けることなく、非線形相互作用によるエネルギーの輸送量 S_{nl} を直接的に考慮した**結合伝播モデル** (Coupled Discrete Model) も現れた。ただし、第二世代の結合伝播モデルは、輸送量 S_{nl} の計算が複雑で大変なため、簡便なスキームで計算出来るように工夫（例えば、輸送量 S_{nl} を厳密に計算しておき、これを数個のパラメータで表したものを使い、多様な波浪スペクトルに当てはめる）されていた。
- ③ 第三世代モデル（1980年代後半から現在）：結合伝播モデルが続いているが、エネルギーの供給・消散関数 S_E として、供給量 S_{in} と消散量 S_{ds} に加えて、輸送量 S_{nl} を出来るだけ正確に計算するようになった。この第三世代モデルには、WAve Model Development and Implementation Group (WAMDI Group) [38] が開発したWAMや、気象庁の植野・石阪 [39] によるMRI-IIIモデルなどがある。そして、Delft University of TechnologyのBooij et al. [40] は、WAMをベースに極浅海域まで適用出来るSWAN (Simulating WAve Nearshore) モデルを開発した。さらに、National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) のThe WAVEWATCH III Development Group [41] も、WAMをベースに推算精度を高めたWAVEWATCH-IIIモデルを開発した。以下に、計算プログラムが公開されているWAMとSWANモデルについて紹介する。

(a) WAM

WAMは、Hasselmannらによって組織されたWAMDI Group [38] によって、1988年に発表された深海域用の波浪推算のための数値計算モデルであり、土木学会研究現況レビュー小委員会 [16] や橋本ら [42] にも詳しくまとめられている。新バージョンのマニュアル等は、<https://github.com/mywave/WAM> か <http://mywave.github.io/WAM/>

で入手できる。

WAM では座標系として直交と球面の 2 種類が用意されており、風から波へのエネルギー供給量 S_{in} 、4 波共鳴の非線形相互作用によるエネルギーの輸送（波浪のエネルギーがスペクトルのピークから低周波側および高周波側へ輸送される現象）の量 S_{nl} 、そして、エネルギー消散量 S_{ds} として、白波碎波と海底摩擦によるエネルギー消散量が考慮されている。

球面座標系の場合のエネルギー平衡方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial S(f, \theta)}{\partial t} + \frac{1}{\cos \theta_x} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_x} \left[S(f, \theta) \frac{C_g \cos \theta \cos \theta_x}{R} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta_y} \left[S(f, \theta) \frac{C_g \sin \theta}{R \cos \theta_x} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[S(f, \theta) \frac{C_g \sin \theta \tan \theta_x}{R} \right] \right] = S_{in} + S_{nl} + S_{ds} \quad (1.2.23)$$

ここに、 $S(f, \theta)$ は波浪の方向スペクトル、 θ_x は緯度、 θ_y は経度、 θ は波向、 R は地球の半径である。

そして、風から波へのエネルギー供給量 S_{in} について、WAM では、Phillips の発生項を用いない方が妥当な結果を得やすいことから、これを無視している。それゆえ、初期の波浪スペクトルがゼロだと、波が発生しないことになるため、吹送距離と初期風速から計算される方向スペクトルを予め与えておく必要がある。

また、Miles の発達項には、Snyder モデルの次式を採用した。

$$S_{in} = B \times S(f, \theta) = \max \left[0, 0.25 \frac{\rho_a}{\rho_w} \left\{ 28 \frac{u_*}{C} \cos(\theta - \alpha) - 1 \right\} \right] \omega \times S(f, \theta) \quad (1.2.24)$$

ここに、 B は Miles の発達項の係数、 ρ_a は大気の密度、 ρ_w は海水の密度、 u_* は摩擦速度、 C は位相速度、 α は風向、 ω は角周波数である。

最新バージョンでは、次の Janssen モデルも導入された。

$$S_{in} = B \times S(f, \theta) = \frac{\rho_a}{\rho_w} \beta \chi^2 \omega \times S(f, \theta) \quad (1.2.25)$$

読者にとって分かりにくい次の数式表現について、ここで解説しておく。

$$y = \max(A, B) \quad (c.1)$$

$$y = \min(A, B, C) \quad (c.2)$$

$y = \max(A, B)$ は、 A と B の大きい方を y として採用することを意味する。

$y = \min(A, B, C)$ は、 A 、 B 、 C の内の最小値を y として採用することを意味する。