第1章　序　説

1.1　水理学で用いる物理・数学の基礎知識

本章では，水理学を学ぶ上で必要となる物理と数学に関する基礎知識，ならびに水の基本的な性質について学ぶ。

1.1.1　物理量と単位

「長さ」,「時間」,「速さ」などのように，物理的な意味を持つ数量のことを**物理量**（physical quantity）という。水理学では数学と物理の知識を基礎として，流速や流量，圧力など様々な物理量を計測したり計算したりするが，求められた数量を物理量としてあらわすには，数値の後ろに**単位**（unit）を記述する必要がある。ここでは，水理学に関係する単位の基礎知識について整理しておく。

物理学においては，長さ（length），質量（mass），時間（time）の３つを**基本量**あるいは**基本物理量**（fundamental quantity）といい，最も基本的な物理量として扱われる。速度，加速度，力，モーメントなど，水理学のみならず物理学全般において代表的な物理量の多くは，これら３つの基本量の組み合わせによってあらわすことができる。基本量の組み合わせによって表現することが可能な物理量のことを**組立量**，または**組立物理量**（derived quantity）という。

３つの基本量の単位として，それぞれ m（メートル），kg（キログラム），s（秒）を用い，これらの組み合わせによってあらわされた単位群を **MKS 単位系**とよぶ。現在では，物理量の単位は，MKS 単位系を基軸とした国際単位系である **SI**（International System of Units）として認められたものを用いることが定められている。ただし，たとえば，時間の長さをあらわす単位である d（日），h（時），min（分）は，いずれも SI の単位としては認められていない（非 SI 単位という）が，これらのような実用上重要なものについては，SI との併用が認められている。

SI では，上で述べた３つの基本量の単位である m，kg，s に，<ruby>K<rt>ケルビン</rt></ruby>（温度），<ruby>A<rt>アンペア</rt></ruby>（電流），<ruby>mol<rt>モル</rt></ruby>（物質量），<ruby>cd<rt>カンデラ</rt></ruby>（光度）を加えた計７種類がほかの単位の組み合わせではあらわすことのできない**基本単位**（fundamental

用語の解説

国際単位系 SI
（International System of Units）では，長さ（メートル：記号 m），質量（キログラム：記号 kg），時間（秒：記号 s），温度（ケルビン：記号 K），電流（アンペア：記号 A），物質量（モル：記号 mol），光度（カンテラ：記号 cd）の７種類の単位を**基本単位**として定めている。これ以外の物理量の単位は，基本単位の組み合わせ（**組立単位**）によってあらわすことができ，速さの単位であるメートル毎秒（記号 m/s）はその一例である。また，特定の組立単位には固有の名称が与えられており，たとえば，力の単位（kg・m/s^2）をあらわす N（ニュートン）や，圧力の単位（N/m^2）をあらわす Pa（パスカル），仕事の単位（Nm）をあらわす J（ジュール），電力の単位（J/s）をあらわす W（ワット）などがある。

unit または base unit）とされ，これらの基本単位の組み合わせによって表現された単位（速度 m/s，密度 kg/m³など）を**組立単位**（derived unit）とよんでいる。なお，組立単位のいくつかには，別の固有名称が与えられているものがあり，水理学でよく用いられるものとして，

力の単位　N（ニュートン）　(kg·m·s^{-2})
圧力の単位　Pa（パスカル）　(N/m^2＝kg·m^{-1}·s^{-2})
仕事の単位　J（ジュール）　(N·m)
電力の単位　W（ワット）　(J/s＝kg·m^2·s^{-3})

などがある。

以前は，長さ，質量，時間に cm（センチメートル），g（グラム），s（秒）を用い，これらの組み合わせによってあらわされた単位群である**CGS 単位系**を用いることもあった。しかし，1991 年に日本工業規格（JIS）の単位の表記方法が SI に統一された以降，水理学においても単位は SI で表記することとされている。現在でも古い資料などで CGS 単位系による記載も見受けられるため，SI と MKS 単位系，CGS 単位系の関係を併せて覚えておく必要がある。

なお，MKS 単位系や CGS 単位系のように，長さ，質量，時間を基本とする単位系は**絶対単位系**（absolute unit system）ともよばれる。

表 1.1　代表的な物理量の SI 単位における固有名称と MKS 単位との関係

物理量	名称	固有名称	MKS 単位	
力	ニュートン	N	kg m/s^2	kg m s^{-2}
圧力	パスカル	Pa	N/m^2	kg m^{-1} s^{-2}
エネルギー	ジュール	J	Nm	kg m^2 s^{-2}
仕事	ジュール	J	Nm	kg m^2 s^{-2}
仕事率	ワット	W	J/s	kg m^2 s^{-3}

1.1.2　次元

長さ（length），質量（mass），時間（time）の 3 つの基本量をそれぞれ[L]，[M]，[T]であらわすと，たとえば，直方体の体積は，

体積 ＝ 横幅の長さ × 奥行きの長さ × 高さ

$$＝[L]\times[L]\times[L]＝[L^3]$$

と表現することができる。また，密度は単位体積あたりの質量，すなわち質量を体積で割ることで求められるので，

密度 ＝ 質量／体積

$$＝[M]／[L^3]＝[ML^{-3}]$$

となり，さらに，単位時間に流れる流体の体積，すなわち流量は体積を時間で割ることで求められるので，

用語の解説

SI 併用単位
角度をあらわす°(度)，′(分)，″(秒)，時間の長さをあらわす d(日)，h(時)，min(分)，体積をあらわす ℓ（リットル），質量をあらわす t（トン）の 8 種類は，いずれも非 SI 単位であるが，実用上重要なものとして，SI との併用が認められている。

また，流体の圧力の単位である bar（バール）や，長さの単位である Å（オングストローム），速度の単位 kn（ノット）など，以前まではよく用いられていた非 SI の単位については，暫定的に SI との併用が認められており，これらを暫定単位という。

次元（dimension）
長さ[L]，質量[M]，時間[T]を基本量として，体積，密度，速度などの物理量を基本量のべき乗「$L^xM^yT^z$」の形であらわしたもの。
速度＝[LT^{-1}]
加速度＝[LT^{-2}]
力＝[MLT^{-2}]
圧力＝[$L^{-1}MT^{-2}$]

なお，基本量 L，M，T のそれぞれを次元という場合や，あるいは指数部分 x，y，z だけを次元という場合もある。

メモの欄

流量 ＝ 体積／時間

$=[L^3]/[T]=[L^3T^{-1}]$

と表現される。

このように，面積，体積，密度，流速，流量などの様々な物理量が基本量[L]，[M]，[T]のどのような組み合わせであらわされるのかを，これらのべき乗「$L^xM^yT^z$」の形で示したものを**次元**（dimension）という。たとえば，紙の厚さと水の深さは，いずれも同じ[L]で表現できるので，両者の次元は同じであり，一方，密度と流量は，上記の例を見るとわかるように，異なる次元式となるので，これらは異なった次元をもつ。

なお，物理量のなかには[L]，[M]，[T]のいずれも持たないものがあり，このような単位をもたないものを**無次元量**（dimensionless quantity）という。水理学において，これに該当する代表的なものとして，レイノルズ数やフルード数などがある。

1.1.3　精度と有効数字

水理実験やフィールド調査において水路の幅や高さといった寸法や水深などを定規などの目盛りのついた計測器を使って目視で測定する場合，どこまで細かく数値を読み取ればいいのだろうか。また，電卓で面積や体積，流速や流量などを計算すると，たくさんの桁（けた）で値が表示されることがあるが，どこまでの桁を信用し書き取ればいいのだろうか。ここでは測定値の信頼性，すなわち**精度**（accuracy）と信頼性が保証されている範囲をあらわす**有効数字**（significant figures）について説明する。

(1)　精度

水路幅 b を計測器で測定した結果を，A さんは 2.5 m，B さんは 250 cm とノートに記入したとする。実はこの場合，両者の間で水路幅の値が持つ意味には大きな違いが生じる。

測定値は，「表示された数値より 1 桁小さい数値部分が四捨五入されたもの」として扱うのが原則となっている。したがって，2.5 m と記入した A さんの場合，0.01 m（1 cm）の単位まで値を読み取り，0.01 m の位を四捨五入して b=2.5 m という長さを得たことになるので，真の水路幅 b_0は

$$2.45\ \mathrm{m} \leqq b_0 < 2.55\ \mathrm{m} \qquad \text{(A)}$$

の範囲内にあると解釈される。また，表示された数値の最小桁がその精度とされ，A さんの記録値の精度は 0.1 m（10 cm）となる。一方，250 cm と記入した B さんの場合，0.1 cm（1 mm）単位まで値を読み取って四捨五入し，b=250 cm という値を得たものとされ，真の水路幅 b_0は

$$249.5\ \mathrm{cm} \leqq b_0 < 250.5\ \mathrm{cm} \qquad \text{(B)}$$

の範囲内にあると解釈され，その精度は 1 cm となる。

つまり，真の水路幅 b_0に対する測定値 b の誤差範囲は，A さんの記録で

メモの欄

は± 5 cm，B さんの記録では，± 5 mm となり，両者で 10 倍もの差が生じてしまうことになる。

このように，数値の記入方法の違いによって測定値の持つ意味に大きな違いが生じ得ることをきっちり認識し，適切な数値表示で記録するよう心がける必要がある。

ある 1 つの**真値**（しんち）（true value）に対して，精度（誤差範囲）が異なる複数の測定値が存在するとき，誤差範囲のより小さいものほど「精度が高い」といい，測定値としての信頼性が高くなる。一方，真値が異なる測定値を比較するときは，たとえ両者の誤差範囲が同じであっても，それらの精度も同等になるとは限らない。そこで，測定値の精度は，通常，相対誤差によって評価がなされる。相対誤差は，

相対誤差 ＝ 誤差範囲の大きさ／測定値

によって求められ，分数，小数，あるいは上記の式に 100 を乗じた百分率（%）のいずれかで表記される。相対誤差の値が小さくなる測定値ほど精度が高く，信頼性が高いといえる。

(2)　有効数字

定規を使った計測のように，測定器に付された目盛りを目視で読み取ることで物理量を測定する場合，最小目盛の 10 分の 1 の単位まで読み取るのが基本ルールとなっている。

最小目盛単位が 1 cm の定規を使って水槽の寸法を目視で計測し，横幅 $L=125.4$ cm，奥行き $W=62.85$ cm，高さ $H=60$ cm という計測値を得た場合について考えてみる。横幅 L は，上で述べた目盛読み取りの基本ルール通り，最小目盛単位の 10 分の 1 である 0.1 cm の精度で記録されており，全ての数値が「有効」となる。一方，奥行き W は，最小目盛の 100 分の 1 の位まで表示されているが，精度が保証されない 0.01 cm の桁部分の数値は原則として「無効」となり，62.8 の 3 桁のみが有効な数値となる。また，高さ H は，本来，0.1 cm の桁まで表示すべきところが，それより 1 桁大きい 1 cm の位までしか数値が表示されていない。この場合，「有効」となるのは表示された 2 桁の数値のみとなる。

なお，**数値としての大きさは変わらないからといって，第三者が明確な根拠のないまま勝手に $H=60.0$ cm というように桁数を増やすことは絶対にしてはいけない。**

表示された数値のうち，精度が保証されており測定値として有効なものを**有効数字**（significant figures）という。上の例の場合，それぞれの有効数字を改めて示すと，$L=125.4$ cm，奥行き $W=62.8$ cm，高さ $H=60$ cm となり，その桁数はそれぞれ 4 桁，3 桁，2 桁となる。

また，これらの値を m（メートル）単位に換算して表記する場合には，有効数字を考慮して，

メモの欄

L＝125.4 cm＝1.254 m，W＝62.8 cm＝0.628 m，

H＝60 cm＝0.60 m

とする。ここで，H＝0.6 m というように末尾の 0 を省略してしまうと，有効数字の桁数が 1 桁に減少し，精度が 1 桁低くなってしまうので注意が必要である。なお，たとえば，0.0005200 のように，小数の位取りのために表記される，0 以外の数値が初めて現れる位より左側の 0 部分（0.000）は有効数字の桁数には含めない。つまり，この例では，有効数字は末尾部分（5200）の 4 桁となる。

1.1.4　数値の 10 の整数乗倍表記と接頭語

水理学では，1,000,000 を超えるような極端に大きな数値や，逆に，小数位取りの 0 がたくさん並ぶような非常に小さな数値を扱う場合があり，表記や演算等における取り扱い上の煩わしさや記載ミスなどの思わぬ誤差の発生を招く恐れがある。

また，たとえば 10 cm は 100 mm と単位換算できるが，前者では有効数字が 2 桁であるのに対し，後者では 3 桁とみなされ矛盾が生じてしまう。

こうした問題を避けるために，SI では，たとえば，1,230,000 m は 1.23×10^{6} m，0.000234 m は 2.34×10^{-4} m というように，10 の整数倍乗を使って有効数字部分を実用的な範囲内（一般には，0.1～1,000 程度）で明確になるように表示することが推奨されている。

SI ではまた，**表 1.2** に示されるように，おもに 3 桁区切りで 10 の累乗をあらわす**接頭語**（prefix）が各種定められており，10 の整数乗倍の部分を単位の中に含めてしまうことができる。たとえば，長さ 1.000 m は 100.0×10^{-2} m あるいは 1000×10^{-3} m ともあらわせるが，10^{-2}および 10^{-3} を意味する接頭語である c（センチ）および m（ミリ）を用いて単位に含めてしまえば，それぞれ 100.0 cm，1000 mm とあらわすことができる。

表 1.2　接頭語

表記	名称	記号	表記	名称	記号
10^{18}	エクサ	E	10^{-1}	デシ	d
10^{15}	ペタ	P	10^{-2}	センチ	c
10^{12}	テラ	T	10^{-3}	ミリ	m
10^{9}	ギガ	G	10^{-6}	マイクロ	μ
10^{6}	メガ	M	10^{-9}	ナノ	n
10^{3}	キロ	k	10^{-12}	ピコ	p
10^{2}	ヘクト	h	10^{-15}	フェムト	f
10	デカ	da	10^{-18}	アト	a

メモの欄

1.1.5　有効数字を考慮した計算

測定値の最末位の数字は，通常，その1つ下の位を四捨五入して得られたものであり不確かさを含んでいる。また，円周率などの無理数をある桁数まで近似した値も最末位の数字は不確かなものとなる。このような数値を**不確かな数値**（uncertain value）という。一方，物体の個数など明らかに誤差を含まない確実な数値や，定義や仮定によって定められた確定的な数値のことを**確定した数値**（exact value）という。

不確かな数値を使って計算を行う場合には，計算の過程や結果の表示において有効数字の桁数を考慮し，計算結果における信頼性が元の測定値より劣化してしまわないように注意する必要がある。加減算と乗除算でその対応方法が異なるので，ここではそれぞれに分けて説明する。

(1)　加減算

AB，BCの2区間からなる水路の総延長を計算する場合を例に考える。AB，BCの長さの測定値がそれぞれ $13.\underline{6}$ m，$86.\underline{2}$ cm であったとすると，これらの測定値の下線を付けた最末位の数字には不確かさが含まれる。単位をm（メートル）に統一させてからこれらの数値を単純に足し算すると，

$13.\underline{6}\ \mathrm{m} + 0.86\underline{2}\ \mathrm{m} = 14.\underline{462}\ \mathrm{m}$

となるが，$13.\underline{6}$ m の小数第1位の値が不確かさ不確定さをもっているため，$14.\underline{462}$ m におけるそれより下位の数字62も信頼性を欠く不確定なものとなる。有効数字は，最末位のみ不確かな数値を含むように表現する。上の例の場合，小数第2位の部分を四捨五入した小数第1位までの数値，すなわち $14.\underline{5}$ m を最終的な計算結果として表示する。つまり，**測定値同士の加減算においては，誤差の幅が最大となる測定値の最末位まで求めるので，最末位より1つ下の位を四捨五入する。なお，計算に確定した値が含まれる場合，確定した値には誤差は含まれないものと考えるので，有効数字の桁数の検討に含める必要はない**。

ところで，測定値の引き算を行う場合には注意すべきことがある。たとえば，1.0007 g と 1.0005 g という2つの質量（単位はグラム）の差を計算すると，

$1.0007\ \mathrm{g} - 1.0005\ \mathrm{g} = 0.0002\ \mathrm{g}$

となり，元の有効数字5桁に対し，計算結果の有効数字は1桁となってしまう。このような現象を**有効数字の桁落ち**という。このような場合，0.0002には元の計測値の信頼性，すなわち「0.0001の精度で有効数字5桁」という信頼性があるものとして有効数字の取り扱いを行うようにする。

(2)　乗除算

底面形状が長方形の水槽の横幅 L と奥行き W を測定し，それらから底面積 A を算出する場合を例に考える。$L = 125.\underline{4}$ cm，$W = 62.\underline{7}$ cm という測定値が得られたとすると，それぞれの最末位の4と7という値はもう1つ下の

位の値を四捨五入して得られたものであり，両者の真の長さはつぎの範囲内にあると考える。

奥行き　$125.35\ \mathrm{cm} \leqq L < 125.45\ \mathrm{cm}$

横　幅　$62.65\ \mathrm{cm} \leqq W < 62.75\ \mathrm{cm}$

したがって，底面積 A の取り得る値の範囲は，

底面積　$125.35 \times 62.65\ \mathrm{cm}^2 \leqq A < 125.45 \times 62.75\ \mathrm{cm}^2$

となる。ここで，この不等式の両端のかけ算を筆算の形で示すと，以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & 2 & 5. & \underline{3} & \underline{5} \\
\times & & & & & 6 & 2. & \underline{6} & \underline{5} \\
\hline
 & & & & \underline{6} & \underline{2} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{5} \\
 & & & \underline{7} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{0} & \\
 & & 2 & 5 & 0 & \underline{7} & \underline{0} & & \\
 & 7 & 5 & \underline{2} & \underline{1} & \underline{0} & & & \\
\hline
 & 7 & 8 & \underline{5} & \underline{3.} & \underline{1} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & 2 & 5. & \underline{4} & \underline{5} \\
\times & & & & & 6 & 2. & \underline{7} & \underline{5} \\
\hline
 & & & & \underline{6} & \underline{2} & \underline{7} & \underline{2} & \underline{5} \\
 & & & \underline{8} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{1} & \underline{5} & \\
 & & 2 & 5 & 0 & \underline{9} & \underline{0} & & \\
 & 7 & 5 & \underline{2} & \underline{7} & \underline{0} & & & \\
\hline
 & 7 & 8 & \underline{7} & \underline{1}. & \underline{9} & \underline{8} & \underline{7} & \underline{5}
\end{array}
$$

不確かさをもつ値による演算では，演算結果もまた不確かさをもつことになり，上の筆算において下線の引かれた数値は，全て不確かさをもつものとなる。したがって，この演算結果における有効数字，すなわち最末位のみ不確かな数値となるようにするには，最上位から3桁を表示すれば良い。この桁数は，有効桁数の少ない横幅の測定値における有効桁数に等しい。

つまり，ここで求めるべき底面積 A は，上の2つの測定値をそのままかけ算し，上から4桁目を四捨五入して，

$A = 125.\underline{4}\ \mathrm{cm} \times 62.\underline{7}\ \mathrm{cm} = 78\underline{62}.\underline{58}\ \mathrm{cm}^2 = 7.\underline{86} \times 10^3\ \mathrm{cm}^2$

となる。基本的には，**測定値の乗除算では，有効数字の桁数が少ない方の測定値の桁数と同じ桁数で計算結果を表示すれば良い。つまり，有効桁数より1つ多く（低い位まで）求め，四捨五入する。なお，確定した数値を計算に用いる場合，加減算の時と同様，その有効数字の桁数は考えなくて良い。また，円周率などの無理数を近似して計算を行う場合は，必要な有効数字と同じかあるいはそれより1つ多い桁数で近似するようにする。**

メモの欄

メモの欄

〔例題 1.1〕

有効数字を考慮してつぎの計算をしなさい。

(1)　$253.6+56.825+39.27=$

(2)　$73.1025+151.3-112.268=$

(3)　$27.4\times 2.519=$

(4)　$0.629\times 3.6\div 5.362=$

(5)　$6.58\times 10.29-32.66=$

〔解〕

(1)　$253.\underline{6}+56.82\underline{5}+39.2\underline{7}=349.\underline{695}=349.\underline{7}$

小数第2位を四捨五入して，4桁にする。

(2)　$73.102\underline{5}+151.\underline{3}-112.26\underline{8}=112.\underline{1345}=112.\underline{1}$

小数第2位を四捨五入して，4桁にする。

(3)　$27.\underline{4}\times 2.51\underline{9}=69.\underline{0206}=69.\underline{0}$

3桁と4桁のかけ算なので答えを3桁にあわせる。

(4)　$0.62\underline{9}\times 3.\underline{6}\div 5.36\underline{2}=0.4\underline{223}\cdots=4.\underline{2}\times 10^{-1}$

3桁と2桁と4桁なので答えを2桁にあわせる。

(5)　まず，3桁と4桁のかけ算を先に計算するが，この段階では最小桁数より1桁以上多く求めておく。

$6.5\underline{8}\times 10.2\underline{9}=67.\underline{70}$

つぎに，引き算を行い，答えを3桁にする。

$67.\underline{70}-32.6\underline{6}=35.\underline{04}=35.\underline{0}$

1.1.6　角度の表し方

角度の表し方には°（度）であらわす**度数法**とrad（ラジアン）であらわす**弧度法（ラジアン法）**がある。

(1)　度数法

度数法とは，円1周分の中心角の大きさに相当する角度を360°として任意の角度をあらわす方法で，円を扇形状に2等分（半円），4等分，8等分したときの各中心角の大きさに相当する角度はそれぞれ180°，90°（直角），45°となる。なお，1°未満の角度については，単位は°（度）のままで10進数での小数表記がなされる場合と，1°の1/60を1′（分），1分の1/60を1″（秒）として，時間の分秒と同様に60進法での表記がなされる場合がある。

1°（度）＝60′（分）＝3600″（秒）

(2)　弧度法

弧度法とは，任意の角度をその角度と同じ中心角 α をもつ半径 r の扇形における円弧長 L と半径 r の比 L/r であらわす方法である。円弧長 L が半径 r と等しくなる（$L=r$）ときの中心角 α が1 radとなり，中心角 α と半径 r

用語の解説

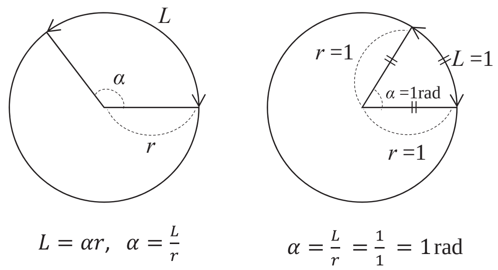


図 1.1　弧度法による角度（ラジアン：rad）のあらわし方
（数研の高校数学第 2 巻（数研出版））

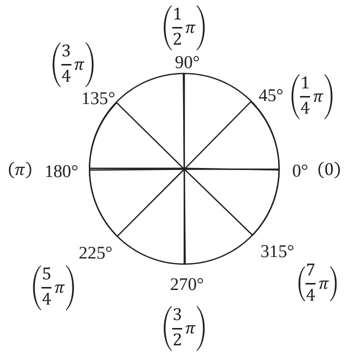


図 1.2　ラジアンと度の換算
（数研の高校数学第 2 巻（数研出版））

を掛け合わせると弧長 L は,

$$L=ar \tag{1.1}$$

となる。また，**図 1.1** のように，半径が 1 の単位円の場合，角度は円弧長 L の値と等しくなり，完全円の中心角，すなわち度数法での 360° に相当する角度は，弧度法では 2 π となる。したがって，度数法と弧度法にはつぎのような関係が成り立つ（**図 1.2**）。

$$\frac{1\ \mathrm{rad}}{360^\circ}=\frac{r}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi} \tag{1.2}$$

$$1\ \mathrm{rad}=\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}=57.2957\cdots{}^\circ=57^\circ17'45'' \tag{1.3}$$

$$1^\circ=\frac{2\pi}{360^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ}=0.0174532\ \mathrm{rad} \tag{1.4}$$

たとえば，中心角 a（rad）の扇形の面積 S は次式で求めることができる。

$$S=\pi r^2\frac{a}{2\pi}=\frac{r^2 a}{2} \tag{1.5}$$

このように，角度を弧度法で表記すると演算式が極めてシンプルな形となることが少なくないため，とくに微分積分や級数計算などにおいては，弧度法での角度表記が一般的となっている。

1.1.7 速度と加速度

水理学において水の流れを扱う場合，流速や加速度が必須の知識となる。日常会話のなかで**速さ**(speed)と**速度**(velocity)が混同して使用されている場面がしばしば見受けられるが，厳密に言えば，この両者には違いがある。

「速さ」は，基本的には，単位時間内に移動した距離をあらわすスカラー量であり，移動する向きは考慮されていない。

速さ[m/s]＝**距離**[m]／**時間**[s]

一方，「速度」は，単位時間内にどれだけの距離を移動したか（スカラー量）だけではなく，どの向きに移動したのかも考慮したベクトル量である。

つまり，「速度の大きさ」が速さに相当し，速さと速度の単位はいずれもm/sであるが，両者は概念的に異なっていることに注意する必要がある。水理学では，水流の速さに加えて，どの向きに流れているのかについても考慮する必要があるため，速度の概念で考えることが多い。

加速度 a（acceleration）とは，単位時間内に変化した速度の変化をあらわしたもので，ベクトル量である。

加速度[m/s^2]＝**速度の変化**[m/s]／**時間**[s]

たとえば，自動車が停止状態（0 m/s）から20秒後に速度が30 m/sに達した場合，この間における平均加速度 a はつぎのように計算される。

$$\text{平均加速度 } a=\frac{30\ \mathrm{m/s}-0\ \mathrm{m/s}}{20\ \mathrm{s}}=1.5\ \mathrm{m/s^2}$$

用語の解説

加速度（acceleration）ニュートンの運動法則の式 $F=ma$ に登場する a で，単位時間当たりの速度の変化量をあらわす。例として，地球上の物体に生じる重力加速度は9.8 m/s^2，通勤電車の発進は0.6 m/s^2，エレベータの発進は1.0 m/s^{2}程度である。

1.1.8 運動の法則とエネルギー

(1) 運動の法則と重力加速度

水理学は，ニュートン力学とよばれる古典物理学を基礎としている。ニュートン力学とは，物体の運動が，物理学者**ニュートン**（Isaac Newton，イギリス）が確立させた質点の運動に関する3つの法則，すなわち，「**慣性の法則**」（第1法則），「**運動の法則**」（第2法則），「**作用・反作用の法則**」（第3法則）に従う性質があるものとして組み立てられた学問である。水理学では，これら3法則のうち，とくに運動の法則（第2法則）に関する知識が重要となる。

運動の法則とは，「物体に力がある向きではたらくとき，物体はその向きに**加速度** a（acceleration）を生じ，その大きさは，**力の大きさ** F（force）に比例し，物体の**質量** m（mass）に反比例する」というものである。言い換えると，「力は物体に加速度を生じさせるもの」ともいえる。とくに，質量 m，加速度 a，力 F の単位としてMKS単位系である，kg，m/s^2，Nを用いれば，

$$F=ma \tag{1.6}$$

という関係式が成立する。この式を**運動方程式**（equation of motion）とい

う。地球上において，手に持ったある物体を地面より高い位置まで持ち上げ，そこに静止させた状態（速度０）で静かに手を離すと，その物体は地面の方向に落下し，その速さは次第に大きくなる，すなわち，地面の方向に加速度が生じる。このことは，つまり，その物体にある力がはたらいたことを意味する。地球上では，全ての物体に対してこれと同様の力が作用し，その力のことを**重力**（gravity）という。運動方程式より，質量 m の物体が重力 W の作用を受けるとき，次式が成り立ち，

$$W=mg \tag{1.7}$$

この式における加速度 g は，**重力加速度**（gravitational acceleration）とよばれ，地球上においては，その大きさは場所によって多少異なるものの，ほぼ一定の値であると考えて差し支えない。なお，1901 年にパリで開催された国際度量衡会議において，標準重力加速度 g は 9.80665 m/s^{2}と定められた。本書ではとくに断りのない限り，重力加速度 g は 9.8 m/s^{2}とする。

(2)　仕事とエネルギー

物理学では，物体が力 F の作用を受けたままある距離 L を移動したとき，「力が物体に**仕事**（work）をした」といい，その仕事 w の大きさは，次式のように力 F と距離 L の積によってあらわされる。

$$w=FL \tag{1.8}$$

F と L の単位を MKS 単位系の N（ニュートン）と m（メートル）とすると，仕事 w の単位は Nm となるが，通常は，これと等しい固有名称単位である J（ジュール）が用いられる。

また，仕事をすることができる能力（可能性）のことを**エネルギー**（energy）といい，仕事と同じ次元で定義されている。たとえば，質量 m [kg]の物体が手で高さ h[m]だけ持ち上げられたとき，手は重力 mg に逆らう力を物体に加えながら距離 h だけ移動させたことになるので，手がその物体に mgh の仕事をし，物体は手によってなされた仕事 mgh だけエネルギーをもったことになる。

物理学（ニュートン力学）では，重力のはたらく地球上において，質量 m の物体が基準点より h だけ高い位置にあるとき，この物体は基準点に対して mgh のエネルギーをもっていると考え，このエネルギー E_pのことを**位置エネルギー**（potential energy）とよんでいる。また，質量 m の物体が v の速さ（向きは無関係）で運動しているとき，その物体は $mv^2/2$ のエネルギーをもっていると考え，そのエネルギー E_kのことを**運動エネルギー**（kinetic energy）という。

物体がある高さから鉛直下向きに重力に従って落下（自由落下）するとき，落下距離だけ物体のもつ位置エネルギーが失われることになり，その一方で，落下に伴って物体の速さが大きくなり，その物体の運動エネルギーは増大することになる。また，地上からある物体を鉛直上向きに投げるとき，

用語の解説

重力加速度（gravitational acceleration）
地球と地球上の物体との間には常に重力が作用しており，重力は物体の質量に比例する。この比例定数を重力加速度という。重力加速度は場所によって異なる値を示すが，1901 年国際度量衡総会で，標準重力加速度 g = 9.80665 m/s^{2}と規定された。各都市における厳密な重力加速度は次のとおりである。
札幌市：9.8047757 m/s^2
東京都：9.7975962 m/s^2
京都府：9.7970768 m/s^2
宮崎市：9.7942949 m/s^2

物体が上昇するほどその物体がもつ位置エネルギーは増大し，一方，物体の速さが次第に低下していくので運動エネルギーは減少することになる。水理学の基礎となるニュートン力学では，位置エネルギー E_p と運動エネルギー E_k の和 E を**力学的エネルギー**（mechanical energy）とよび，ある物体に対して，外力が加わらない限り，その物体の E は常に一定に保たれるものとされる。これを**力学的エネルギー保存の法則**（law of conservation of energy）という。

水理学では，位置エネルギー，運動エネルギーに圧力エネルギーを加えた3つを扱う。なお，本来の単位はいずれもJ（ジュール）であるが，水理学ではこれを長さの単位m（メートル）に変換した**水頭**（すいとう）（hydraulic head）という概念を用いる。その詳細は第3章において述べることとする。

1.1.9 質量と重量（重さ）

質量と重量（重さ）は同じ物理量として思われがちであるが，両者は概念的に異なったものである。

質量（mass）とは，物体の動きにくさや，作用する重力の大きさの決定因子となる物体固有の量のことで，単位にはkg（キログラム）やg（グラム），mg（ミリグラム）などが用いられる。質量は，地球上のみならず，宇宙空間も含め，どの場所でも常に一定であり，たとえば，1 kgの水を重力が地球の1/6になる月に持って行っても，その質量はやはり1 kgである。

一方，**重量**あるいは**重さ**（weight）とは，質量をもつ物体に作用する重力の大きさのことであり，質量と重力加速度の積によって求められるものである。重量の本来の単位および次元は力のそれらに等しく，N（$=\mathrm{kg \cdot m/s^2}$）および$[\mathrm{MLT^{-2}}]$であるが，重量が「質量と重力の積である」ことを表現し，さらに数値的には質量と同じとなるkgfあるいはkg重（キログラムフォース，キログラムエフ，またはキログラム重（じゅう）と読む。）といった単位表記が今でも比較的よく用いられる。ただし，いずれも非SIの単位表記であることに注意する必要がある。たとえば，地球上において，質量1.0 kgの水の重量は，

質量 × 重力加速度 ＝ 重量

$1.0\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} = 9.8\,\mathrm{N} = 1.0\,\mathrm{kgf} = 1.0\,\mathrm{kg}$重

となる。もしこの水を月に持って行った場合，月の重力は地球の1/6となるので，その重量は約1.6 N（=0.17 kgf）となる。

[例題 1.2]

質量 5.0 kg の水に作用する重量はいくらか。[N] と [kgf] で答えよ。ただし，重力加速度を 9.8 m/s^{2}とする。

[解]

重量は質量と重力加速度の積で求められる。

5.0 kg×9.8 m/s^2＝49 [N]＝5.0 [kgf]

1.1.10　力のモーメント

水理学を含め，物理学にかかわる分野では，力をあらわすには，その「大きさ」,「向き」,「作用点」の 3 つの要素が不可欠であり，これらを**力の 3 要素**（three elements of force）という。力を図であらわす場合，**図 1.3** に示すように，その大きさを線分の長さで，向きを線分の傾きと先端に付けた矢印で，作用点を線分の位置（通常は，両端のどちらかを置く）で表現する。また，力の作用点を通り，力の向きと平行な直線を**作用線**（line of application）という。

複数の力を組み合わせて，それらと同じ結果をもたらす 1 つの力を求めることを**力の合成**（composition of force）といい，合成された力のことを**合力**（resultant force）という。逆に，1 つの力を，全てを合成すれば同じ結果をもたらすような複数の力に分けることを，**力の分解**（decomposition of force）といい，分解された力のことを**分力**（component of force）という。力は，大きさと向きをあわせもつベクトル量である。したがって，力の合成や分解などの演算は，ベクトルの演算方法に従って行われる。ある 1 点に複数の力が作用し，それらの合力が 0 となるとき，その点に作用する力は**釣り合い**（equilibrium）の状態にあるという。

ある力 $\boldsymbol{P}$ と，任意の点 O から $\boldsymbol{P}$ の作用線までの垂直距離 l の積

$$M=\boldsymbol{P}l \tag{1.9}$$

を点 O に対する**力のモーメント**（moment of force）という。力 $\boldsymbol{P}$ の作用線と，距離 l を与える線分は常に直交し，また，点 O が作用線上にあるとき，l=0，すなわち $\boldsymbol{M}$=0 となる。なお，物理学の分野では，力のモーメントのことを単に**モーメント**（moment）とよぶことが多く，本書においても単に

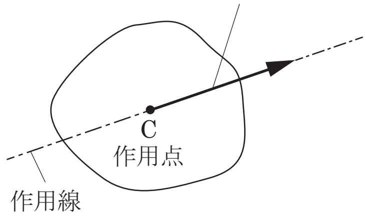


図 1.3　力のあらわし方

用語の解説

モーメント（moment）
物理量や関数値など，何らかの数量と，ある基準点からその数量の作用点までの距離の積であらわされたものを**モーメント**という。たとえば，乗じるべき数量が力であれば，“力のモーメント”，確率値であれば，“確率モーメント”と呼ばれる。もともとは物理学分野の概念であるが，数学分野などでも抽象化させて用いられている。物理学分野において単に“モーメント”という場合は，一般的には“力のモーメント”のことを意味する。距離には，方向が考慮されるので，基準点との位置関係よって負値を取ることもある。用途により，距離のべき乗と所定の数量との積であらわすものもあり，そのべき乗数 n に応じて“n 次モーメント”とよばれる。また，断面のように対応する距離が一意に定まらない場合は，対象を微小部分に分割し，それぞれのモーメントを全体で積分して求められる。

モーメントという場合には力のモーメントのことを意味する。

モーメント $\boldsymbol{M}$ は，その対象点を支点として回転させようとする，あるいは曲げようとする力の大きさをあらわし，$\boldsymbol{M}$ が大きくなるほど，その力も大きくなる。力 $\boldsymbol{P}$ の方向によって，$\boldsymbol{M}$ は支点に対して右回り（時計回り方向）または左回り（逆時計回り方向）となり，本書では，とくに断りの無い限り，右回りに回転させようとする $\boldsymbol{M}$ の値を正とする。なお，分野によっては，左回り方向を正とする場合もあるので注意が必要である。**図 1.4** に示すように，一様な棒において，支点 C の両側に複数の力が作用しているとき，支点に作用する総モーメント $\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P}_{\mathrm{R}i}l_{\mathrm{R}i}-\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}_{\mathrm{L}i}l_{\mathrm{L}i} \tag{1.10}$$

また，この棒が左右どちらにも回転することなく釣り合っているとき，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}=0$ となる。さらに，棒に作用している全ての力の合力 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}$ による支点 O に対するモーメント $\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}$ は $\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}$ に等しい，すなわち支点 O から $\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}$ の作用点までの距離を l_{r} とすると，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}l_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}} \tag{1.11}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}>0$ のとき，時計回りに回転させる力が作用していることを示すので，合力 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}$ の作用点は支点 O より右側に位置し，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}<0$ のとき，それは左側に位置する。

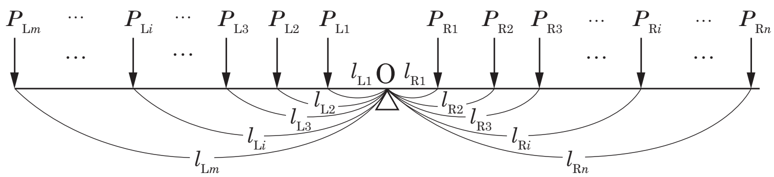


図 1.4 力のモーメントの総和
（下の文字 l は支点 O からの距離）

1.2 水の基本的性質

1.2.1 密度，単位体積重量，および比重

物質の物理的性質をあらわす代表的な指標として，密度，単位体積重量，および比重がある。いずれも質量や重さに関係するものであるが，それぞれの定義が異なる。

密度（density）とは，物質の単位体積当たりの質量のことであり，単位には kg/m^3 や g/cm^3 などが用いられる。

単位体積重量（weight density）とは，物質の単位体積当たりの重量（重さ）のことである。**1.1.9 質量と重量（重さ）**で説明したように，重量は

用語の解説

密度（density）
単位体積当たりに換算した物体の質量のこと。温度や気圧によって変化するが，水の場合，1 気圧，4℃のときに最大値である 999.97 kg/m^3 となる。海水は，1,010〜1,030 kg/m^3 である。また，水の密度と重力加速度の積が水の**単位体積重量**としてあらわされ，一般的には水の密度が 1,000 kg/m^3，重力加速度が 9.8 m/s^2 として扱われることから，水の単位体積重量は 9.8 kN/m^3 が用いられる。

用語の解説

質量 m に重力加速度 g を乗じたものなので，単位体積重量 w もまた密度 ρ に重力加速度 g を乗じることによって得られる。単位には N/m^3 などが用いられる。

物質の密度および単位体積重量は，分子の数に変化がなくても，気圧，気温，物質の純度などによって変化する。**表 1.3** は，1 気圧条件下における各温度での不純物を含まない純粋な水の密度 ρ と単位体積重量 w を示したものである。ρ および w は，4℃のとき最大となり，それより温度が高くても低くても 4℃から離れるほど，わずかながら小さくなる。なお，水理学では，とくに断りがない場合，水の密度 ρ は 1,000 kg/m³とし，また，水の単位体積重量 w は次式から得られる 9.8 kN/m³として扱うのが一般的である。

$$w=\rho g=1{,}000\ \mathrm{kg/m^3}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}=9{,}800\ \mathrm{N/m^3}=9.8\ \mathrm{kN/m^3} \quad (1.12)$$

比重（specific gravity）とは，ある物質の密度を，標準とする物質の密度との比であらわしたもので，無次元である。通常，標準とする物質として 4℃の水が用いられる。したがって，水の比重は，厳密には温度によってわずかに変化するが，通常は 1.0 とされ，金の比重は 19.3，水理学と関わりの深い水銀の比重は 13.6，海水の比重は 1.01〜1.03（代表値として 1.025 が用いられる）である。

表 1.3　水の密度と単位体積重量（1 気圧の場合）

温度 (℃)	密度 ρ (kg/m³)	単位体積重量 w (N/m³)	温度 (℃)	密度 ρ (kg/m³)	単位体積重量 w (N/m³)
0	999.84	9,805.08	30	995.65	9,764.00
4	999.97	9,806.36	40	992.22	9,730.35
10	999.70	9,803.71	60	983.20	9,641.90
15	999.10	9,797.82	80	971.80	9,530.10
20	998.20	9,789.00	100	958.40	9,398.69

（わかりやすい水理学（2013）より引用）

1.2.2　圧縮性

図 1.5 のように，水を密閉した容器に入れ，ふたの上に重りを載せて下方に力を加えると，わずかではあるが，体積が減少してふたが沈み，重りを取り除くとふたは再び元の位置に戻る。この様に物体に力を加えると変形し，その力を取り除くと元の形に戻る性質を**圧縮性**（compressibility）という。厳密には，水は圧縮性を有しているが，1 気圧の加圧に対する体積変化割合は 50×10^{-6}（2 万分の 1）程度に過ぎないので，非圧縮性流体として扱うことが多い。本書でも，**水は非圧縮性を有するものとして扱う**ことにする。

なお，本書では扱わないが，水理学でも水の圧縮性が考慮される場合がある。たとえば，総延長が数キロにも及ぶパイプラインにおいて，送水中に急に弁を閉じて水の流れを止めると，巨大な流水体がもっていた運動エネルギ

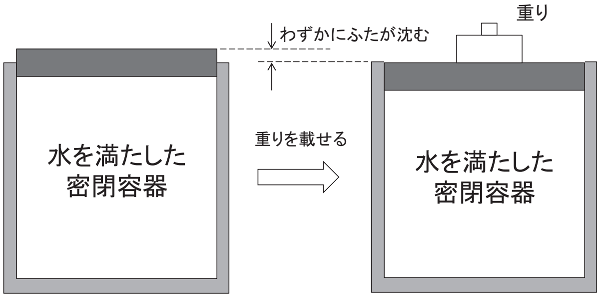


図 1.5 水の圧縮性

ーが局所に集中して異常に大きな圧力（水撃圧）が発生するが，水の圧縮性によってその衝撃の一部が緩衝される。このメカニズムについて解析計算を行う際には，水を圧縮性流体として扱う必要がある。

1.2.3 粘性とせん断力

たとえば，バケツに入れた水を手に持った棒でかき混ぜるとき，水が入っていない状態のときよりも棒に強い抵抗が感じられ，より大きな力が必要となる。これは，水には形状を変えられようとすると，それを妨げる方向に力がはたらく性質があるためである。この性質を**粘性**（ねんせい）（viscosity）という。実在する全ての流体は粘性をもっており，その強さは流体の物質や，液体か気体かといった状態によって異なる。

粘性（ねんせい）（viscosity）
流体の内部に発生する流動に対して抵抗する性質。

水が管水路の中を流れるとき，水のもつ粘性によって，任意の断面における流速は一様ではなく，**図 1.6**（左図）のように，管内の中心部ほど大きく，管壁に近いほど小さいという分布になる。これは，壁面付近を流れる水分子が壁面に付着しようとする力や壁面の凹凸によって，流水の進行が妨げられ，速度が低下し，さらにその影響が，水分子同士が引きつけ合う性質を通じて，次第に弱まりながらも壁面から離れた分子にも及んでいくためである。以下では，この管水路の流れを例にして，粘性の定式化について説明する。

いま，この管水路の流れを**図 1.6**（右図）のように模式化して，各層内では流速がそれぞれ一様な a～e 層で構成されているものとする。流速は，中心部に位置する c 層で最も大きく，管壁と接する a 層および e 層で最も小さくなる。このとき，各層の境界面では，流速の異なる水分子が分子間力によって互いに引き合おうとするため，流速の大きい方の層にある水分子は遅くなる方向に，小さい方の層にある水分子は速くなる方向に引っ張られることになり，物質内部で互いの速度（運動）をそのまま維持させるのを妨げるような力，すなわち**内部摩擦抵抗**が境界面全体にわたってはたらく。このように，流体において運動を妨げる方向にはたらく力のことを**せん断力**（shearing force）または**内部摩擦**（internal friction）という。せん断力は，

用語の解説

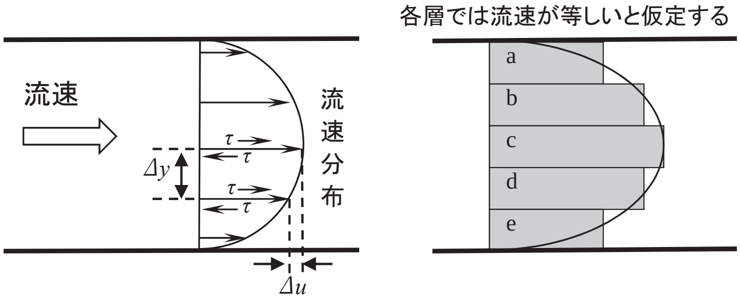


図 1.6　流速分布

通常，単位面積あたりの大きさであらわされ，これを**せん断応力**（shearing stress）という。せん断応力の単位は N/m^{2}となるが，一般的には Pa（パスカル）が用いられる。

流体が静止している場合や流体内の粒子間に相対的な運動のずれが生じていない場合には，粒子が互いの運動を妨げ合うことはないので，せん断力（内部摩擦）は生じない。また，粒子間における相対的な運動のずれ具合が大きいほど，すなわち速度こう配が大きいほど，相互に運動を妨げようとする度合いも大きくなると予想される。そこで，流れに垂直な断面（**図 1.6** 左図）における，互いの運動に影響を及ぼし合うような，ごくわずかな距離 Δy しか離れていない２点について，この２点間での速度差を Δu とすると，その間での速度こう配は $\Delta u/\Delta y$ となり，これとその間で作用するせん断応力 τ（タウ）が比例関係にあると仮定して比例定数を μ（ミュー）とおくと，次式が成り立つ。

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} \tag{1.13}$$

この式を**ニュートンの粘性方程式**（Newton's law of viscosity）という。この式における比例定数 μ は**粘性係数**（coefficient of viscosity）とよばれ，物質の粘性の強さをあらわす指標となり，この値が大きくなる物質ほど「粘性が大きい（高いまたは強い）」といわれる。粘性係数の SI での単位は Pa･s（＝N･s/m^2）であるが，かつてよく用いられていた CGS 単位系の g･cm^{-1}･s^{-1}（＝0.1 Pa･s）や g･s/cm^2（＝98.067 Pa･s），固有名称単位の P（ポアズ）（＝0.1 Pa･s＝0.1 N･s/m^2）など，ほかにも様々な単位を使った数値表記がなされているので，数値計算を行う際には，単位換算のし忘れや計算ミスのないよう十分注意する必要がある。粘性係数の値は流体の種類によって異なり，また同一の流体であっても温度によって変化する。

水理学やこれに関連する分野ではまた，粘性係数 μ を流体の密度 ρ で除した**動粘性係数** ν（ニュー）（coefficient of kinematic viscosity）もよく用いられる。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.14}$$

動粘性係数の単位は m^2/s であり，かつては CGS 単位系の固有名称単位

動粘性係数
（coefficient of kinematic viscosity）流体の粘性係数を密度で除した値であり，単位は m^2/s などである。

表 1.4 水の粘性係数・動粘性係数

温度（℃）	0	5	10	15	20	25	30	40	50
粘性係数 $\mu(10^{-3}\mathrm{Pa \cdot s})$	1.792	1.519	1.307	1.138	1.002	0.8902	0.7973	0.6527	0.5471
動粘性係数 $\nu(10^{-6}\mathrm{m^2/s})$	1.792	1.519	1.307	1.139	1.004	0.8928	0.8008	0.6578	0.5537

注）粘性係数の単位：$10^{-3}\mathrm{Pa \cdot s}=10^{-3}\mathrm{N/m^2 \cdot s}=10^{-3}\mathrm{kg \cdot m/s^2 \cdot s}=10^{-3}\mathrm{kg/(m \cdot s)}$

である St（$=\mathrm{cm^2/s}=10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$）がよく用いられた。動粘性係数は，流体内での「速度の伝わりやすさ」の指標になり，たとえば，流れの種類の判定や土壌物理学の分野における熱と水の流れに関する解析計算などで利用される。

各温度における水の粘性係数および動粘性係数の値は**表 1.4** に示されるとおりである。水の粘性は，液体の中ではきわめて小さく，粘性係数および動粘性係数の値も他の流体物質に比べると非常に小さいものとなる。このため，水の粘性を無視できるものとして扱われることもある。

1.2.4 表面張力と毛管現象

きれいなガラス板の平面に水滴を垂らすと水滴は表面積が最小になる球形に近い形状になろうとする。これは水分子同士が互いに引きつけ合うことによって，水滴表面で収縮力がはたらくためである。このような液体の表面ではたらく収縮力を**表面張力**（surface tension）という。表面張力は，単位長さあたりに作用する力(N/m)であらわされる。また，固体であるガラス面に水が付着して離れないようにする力を**付着力**（adhesive force）という。

図 1.7 のように，静水中に濡れた細いガラス管を立てると，水は表面張力と付着力によって管内を上昇する。これを**毛管現象**（capillarity）という。周囲の水面を基準としてガラス管内を上昇した水の重量と，ガラス管内の水面とガラスの接触部分において水を引き上げている力の鉛直分力とは釣り合っている。この条件から表面張力，水中の高さなどを求めることができる。

図 1.8 に示すように，ガラス管の内径 D，水の高さ h，水の密度 ρ，ガラス管内における水面とガラスとの接触角 θ とすると次式が成り立つ。

ガラス管内を上昇した水の重量 ＝ 表面張力の鉛直分力

$$\rho g\frac{\pi D^2}{4}h=\pi DT\cos\theta \tag{1.15}$$

$$\therefore\ T=\frac{\rho gDh}{4\cos\theta} \tag{1.16}$$

$$h=\frac{4T\cos\theta}{\rho gD} \tag{1.17}$$

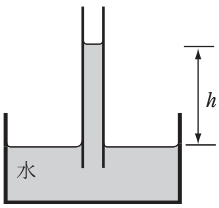
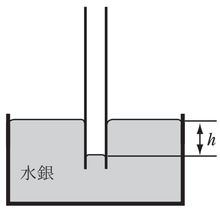


図 1.7 毛管現象による水の上昇

用語の解説

毛管現象（capillarity）
細い管の中を液体が上昇したり下降したりする現象。表面張力や管の内壁のぬれやすさ，密度や温度，管の内径によって液体が上昇する高さが決まる。

水銀はガラス管などとの接触角が 90° 以上になるので，下図のように管内の水銀が下方へと引き下げられ，管内の液体面は管外よりも下がる。



メモの欄

表 1.5 に示されるように，表面張力は温度，物質によって異なる。水の表面張力は，およそ 7.4×10^{-2} N/m ときわめて小さいので，水理学では表面張力の影響を無視して扱うことが多い。また，**表 1.6** のように，水や水銀といった液体はガラスなどとの接触面の状態によって接触角が異なることが知られている（**図 1.9**）。

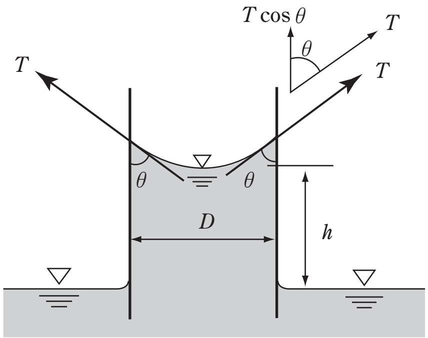


図 1.8　水柱と表面張力のつりあい
（土木基礎力学 2　2005，実教出版）

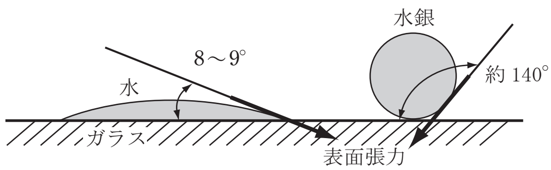


図 1.9　ガラス面上の水（左）と水銀（右）

表 1.5　水と水銀の表面張力

液体	温度 [℃]	表面張力 T [N/m]
水	0	7.56×10^{-2}
	10	7.42×10^{-2}
	15	7.35×10^{-2}
	20	7.28×10^{-2}
水銀	15	4.87×10^{-1}

表 1.6　接触角の値

接触する物質	接触角 θ(度)
水とガラス	8～9
水とよく磨いたガラス	0
水と滑らかな鉄	約 5
水銀とガラス	約 140

〔**例題 1.3**〕

内径が 5.0 mm のガラス管を水中に鉛直に立てたところ，毛管現象でガラス管の中を水が上昇した。このとき，ガラス管内を水が昇る高さはいくらになるか求めよ。ただし，水温を 20 ℃，水とガラスの接触角を 8 °とする。

〔**解**〕

水の表面張力　$T=7.28\times10^{-2}$ N/m（**表 1.5** より）

水の密度　$\rho=998.20$ kg/m^3（**表 1.3** より）

管の内径　$D=5.0$ mm$=0.0050$ m

$$\cos\theta=\cos 8°=0.9903$$

（1.17）式より，

$$h=\frac{4T\cos\theta}{\rho g D}=\frac{4\times7.28\times10^{-2}\times0.9903}{998.20\times9.8\times0.0050}=5.896\times10^{-3}\ [\mathrm{m}]=5.9\ [\mathrm{mm}]$$

1.2.5　粘性流体と完全流体

実在する流体が運動するとき，その内部，またはこれと接触する他の物体との間に，その運動を妨げようとする力，すなわち粘性抵抗が生じる。このような性質をもつ流体を**粘性流体**（vicous fluid）という。これに対し，粘性抵抗が全く作用しないとした，仮想的な流体を**完全流体**（perfect fluid）または**理想流体**（ideal fluid）という。

粘性抵抗が作用するとき，必ずエネルギーの損失が生じるため，流体を粘性流体として扱う際には，これを考慮する必要があり，数学的な取り扱いがその分複雑となる。一方，完全流体ではエネルギー損失を考慮する必要がないため，数学的取り扱いがより簡単なものとなる。このため，流体の流れに関する基礎理論を学んだり，流れの基本的なメカニズムについて検討したりする場合や，あるいは現実の課題でも，実用上，エネルギー損失を無視できるような場合などにおいては，対象とする流体を完全流体として扱うことがある。

水は粘性流体であるが，他の液体に比べて粘性が非常に小さいので，完全流体として扱われることも少なくない。また，水を粘性流体として扱う場合でも，まず完全流体として扱った後，様々な要因で発生するエネルギー損失を後から考慮して補正するという方法で取り扱われることもある。

メモの欄

メモの欄

〔演習問題〕

〔問題 1.1〕

有効数字を考慮して次の計算をしなさい。

(1) 25.8 + 0.25＝

(2) 23.5×3.4＝

〔問題 1.2〕

有効数字を考慮して，空欄に入る正しい数値を答えなさい。ただし，重力加速度は 9.8 m/s^{2}とする。

地球上で重力によって質量 $\boxed{(1)}$ ×10^3 kg の物体に作用する力は 9.8 kN である。

質量 $\boxed{(2)}$ ×10^3 kg の物体が 12 m/s^{2}の加速度で運動したとき，物体に作用する力は 24.0 kN である。

〔問題 1.3〕

5.000 L（リットル）の海水をはかりで測定した結果，5.125 kg であった。この海水の密度，比重，および単位体積重量はいくらになるか。ただし，水の密度は 1.000×10^3 kg/m^3，重力加速度は 9.8 m/s^{2}とする。

〔問題 1.4〕

鉛直に立てた細くてまっすぐなガラス管の下端を水面に浸したところ，水がガラス管内を 9.0 mm だけ上昇した。このガラス管の内径を求めよ。ただし，水温を 15℃，水とガラス管との接触角を 8.0° とする。

〔問題 1.5〕

鉛直に立てた内径 5.0 mm のガラス管の下端を水銀の液面に浸したとき，毛管現象によって水銀がガラス管内を上昇する高さを求めよ。ただし，水銀の温度を 15℃，このときの水銀の密度を 13,558 kg/m^3，水銀とガラス管の接触角を 140° とする。また，高さは上向きを正とする。

演習問題の解答

〔問題 1.1〕 (1) 26.1　(2) 80

《解説》

(1) 有効数字は最末位のみ不確定な数値（下線の数値）を含むように表現する。

$$25.\underline{8}+0.2\underline{5}=26.\underline{05}=26.\underline{1}$$

(2) 有効数字の桁数が最も少ない数値と同じ桁数で計算結果を表示する。この場合，3.4 の 2 桁に答えの桁を合わせる。

$$23.\underline{5}\times 3.\underline{4}=79.\underline{9}=\underline{80}$$

〔問題 1.2〕 (1) 1.0　(2) 2.0

メモの欄

《解説》

(1) 運動方程式 $F=ma$ より，

$$m=\frac{F}{a}=\frac{9.8\,\mathrm{kN}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}=1000\,\mathrm{kg}=1.0\times10^3\,\mathrm{kg}$$

1000 kg と表記すると有効数字が不明確なので，有効数字が2桁であることを明示するため，1.0×10^3 kg と表示する。

(2) 運動方程式 $F=ma$ より，

$$m=\frac{F}{a}=\frac{24.0\,\mathrm{kN}}{12\,\mathrm{m/s^2}}=2000\,\mathrm{kg}=2.0\times10^3\,\mathrm{kg}$$

2つの数値の桁数を比較して，小さい方の桁数に計算結果をあわせる。

〔問題 1.3〕密度 $1.025\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，比重 1.025，単位体積重量 $10.05\,\mathrm{kN/m^3}$

《解説》

容積の換算について，5.000 L は $5.000\times10^{-3}\,\mathrm{m^3}$と等しい。

密度 $\dfrac{5.125\,\mathrm{kg}}{5.000\times10^{-3}\,\mathrm{m^3}}=1.025\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

比重は，水の密度に対する海水の密度の比で表現されるので，

$$\frac{1.025\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}}{1.000\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}}=1.025$$

単位体積重量 $1.025\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}\times9.8\,\mathrm{m/s^2}=10.05\,\mathrm{kN/m^3}$

〔問題 1.4〕3.3 mm

《解説》

表 1.5 より，$T=7.35\times10^{-2}\,\mathrm{N/m}$

表 1.3 より，$\rho=999.10\,\mathrm{kg/m^3}$

$\cos\theta=\cos 8°=0.9903$

(1.17) 式を変形して，

$$D=\frac{4T\cos\theta}{\rho gh}=\frac{4\times7.35\times10^{-2}\times0.9903}{999.10\times9.8\times0.0090}=3.304\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$=3.3\,[\mathrm{mm}]$$

〔問題 1.5〕-2.2 mm

《解説》

水銀の表面張力 $T=4.87\times10^{-1}\,\mathrm{N/m}$（**表 1.5** より）

水銀の密度 $\rho=13558\,\mathrm{kg/m^3}$

管の内径 $D=5.0\,\mathrm{mm}=0.0050\,\mathrm{m}$

$\cos\theta=\cos 140°=-0.7660$

式（1.17）より，

$$h=\frac{4T\cos\theta}{\rho gD}=\frac{4\times4.87\times10^{-1}\times-(0.7660)}{13558\times9.8\times0.0050}=-2.246\times10^{-3}\,[\mathrm{m}]$$
$$=-2.2\,[\mathrm{mm}]$$

水銀の場合，ガラス管内の液面は外部の液面よりも低下する。

引用・参考文献

1）井上和也ほか：土木基礎力学 4（水理学・土質力学の基礎），実教出版，2005

2）丹羽健蔵：水理学詳説，理工図書，1997

3）岡澤宏・小島信彦・嶋栄吉・竹下伸一・長坂貞郎・細川吉晴:わかりやすい水理学，理工図書，2013

4）国立天文台（編纂）：理科年表 平成 17 年（机上版），丸善，2005

5）岡部恒治・数研出版編集部共著:もういちど読む　数研の高校数学第 2 巻，数研出版，2011

6）海老原寛：新版　単位の小辞典　SI 換算早わかり，講談社サイエンティフィク，1994

メモの欄

第2章　静水圧

水中では，常に水からの力が作用する。本章では，水理学の基礎となる，静止した水の中で作用する力の性質や原理，その大きさの求め方などに関する基本的な事項について学ぶ。

2.1　静水圧の性質

静止している水の中では，圧力のみが作用する。この圧力のことを**静水圧**（せいすいあつ）（hydrostatic pressure）という。ただし実際には，静水圧のことを，単に水圧とよぶことも多く，本書でも単に水圧という場合には，静水圧のことを意味するものとする。

静水圧 p は，水中において単位面積あたりに作用する力であらわされる。したがって，静水圧の単位は MKS 単位系であらわすと $\mathrm{N/m^2}$ あるいは $\mathrm{m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}}$ となるが，Pa（パスカル）という固有単位が用いられるのが一般的である。静水圧には，次の３つの性質がある。

①静水圧は面に対して垂直に作用する。

②任意の点において作用する静水圧は，全ての方向に対して等しい。

③静水圧の大きさは水深の増加に伴って直線的に増加し，同一水平面上では等しい。

2.1.1　全水圧

面積を持つ物体が水中にあるとき，水に接している面全体に対して水圧が作用する。面に作用する水圧を対象面全体について合計（積分）したものを**全水圧**（ぜんすいあつ）（total pressure）という。全水圧の単位は，力の単位と同じであり，N や kN などとなる。面積 A に対して水圧 p が一様に作用しているとき，水圧 p と全水圧 P の関係は 式(2.1)のようになる。

$$P = pA,\quad p = \frac{P}{A} \tag{2.1}$$

2.1.2　水圧と水深の関係

一般に，大気と接している水面のことを**自由水面**（または**自由表面**）（free surface）という。自由水面より上では水圧は作用せず，大気から作用する圧力，すなわち大気圧のみが作用し，自由水面より下の水中において水圧が生じ，その大きさ p は水深 H の増加に伴って直線的に増加する。また，

用語の解説

圧力の単位（unit of pressure）
現在は，圧力の単位としてPa（パスカル）が用いられるのが一般的である。Pa は特別な名称をもつ SI 組立単位として定められており，次元は $[\mathrm{L^{-1}\ M\ T^{-2}}]$ である。“Pa”という表記は，圧力伝達の法則ともよばれる「パスカルの原理」を発見したフランスの物理学・数学者ブレイズ・パスカル（Blaise Pascal，1623-1662）の名に因んでいる。

$1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}}$ であり，天気予報では気圧の単位として hPa（ヘクト・パスカル，ヘクトは 10^2 を意味する接頭語）が用いられている。以前は，水銀柱ミリメートル（mmHg）やミリバール（mb または mbar）が圧力に関する単位としてよく用いられており，現在でも血圧の単位には mmHg を用いるのが標準となっている。

ある物体が水中にあるとき，大気には直接触れることはないが，その物体が受ける水圧には周囲の水による圧力に加え，大気圧による作用も含まれており，その大きさは自由水面における大気圧の大きさ p_0 に等しく，水深にかかわらず一定である。

水圧の大きさのあらわし方には，「大気圧の影響分を無視し，水からの作用分のみを考慮してあらわす方法」と，「大気圧の影響分，すなわち p_0 も含めてあらわす方法」の２通りがある。

前者の場合，水圧の大きさ p は，水の密度を ρ，重力加速度を g とすると，以下の式(2.2)であらわされ，自由水面上（$H=0$）で $p=0$ となり，水深 H と比例関係となる。この方法によってあらわされた水圧を**ゲージ圧**（gauge pressure）という。

$$p=\rho gH \tag{2.2}$$

一方，後者の場合，水圧の大きさ p' は，以下の式(2.3)であらわされる。

$$p'=p+p_0=\rho gH+p_0 \tag{2.3}$$

p' は，真空を基準（圧力ゼロ）として，被圧体に対して実際に作用する絶対的な圧力を示すものであり，これを**絶対圧**（absolute pressure）という。

水理学では，ゲージ圧が用いられるのが一般的である。本書でも，とくにことわりのない限り，水圧はゲージ圧として扱うものとする。

〔解説〕

水深 H と水圧 p の関係をあらわす式(2.2)および式(2.3)は，**図 2.1** に示されるような水中で静止している微小直方体（以下，単に直方体）における力の釣合いの関係から導くことができる。図のように xyz 座標を定め，直方体の３種類の辺の長さをそれぞれ Δx，Δy，Δz，上面および底面はともに水平で，水面から上面までの深さを H とする。また，直方体の水と接しているすべての面に対し，水圧が垂直に作用し，その大きさは深いほど大きくなるもの（圧力 p は深さ z についての正の関数）とする。

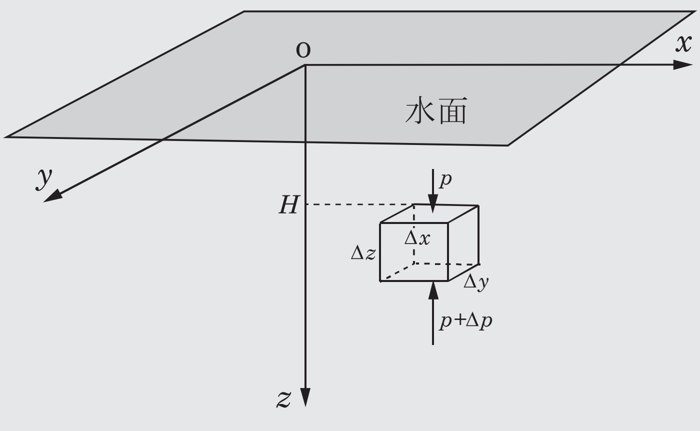


図 2.1

用語の解説

水圧（hydrostatic pressure）と**全水圧**（total pressure）

水圧（または静水圧）は，水中にある面に対して作用する単位面積あたりの力の大きさのことであり，SI 単位では N/m^2 となる。一方，全水圧は，面の各部に作用する水圧の合計（水圧を面全体で積分したもの）のことであり，その単位は力の単位と同じ N となる。

水圧と全水圧で単位が異なることに注意されたい。

大気圧（atmospheric pressure）

地球上において，大気によって作用する圧力。実際には場所や気象条件によって変化するが，海面上での標準的な値として，標準大気圧は 1013.25 hPa（ヘクト・パスカル）と定められており，この値が１気圧と定義されている。

慣性の法則（the law of inertia）

ニュートン力学における運動に関する３つの法則のうちの第１番目で，「すべての物体は，外部から力を加えられない限り，静止している物体は静止状態を続け，運動している物体は等速直線運動を続ける」というもの。この法則に従うと，外部から力を受ける物体が静止あるいは等速直線運動をしているときは，その外力がすべての方向で釣り合っていることになる。

メモの欄

直方体の上面に対して水圧が下向きに作用している場合，それより Δz だけ深い底面では，p より大きな水圧を受ける。その増分を Δp とすると，底面には大きさ $p+\Delta p$ の水圧が上向きに作用することになる。また，慣性の法則により，物体が水中で静止しているとき，その物体に作用する外力はすべての方向で釣り合っていることになる。

この直方体に作用する外力は，まわりの水からの圧力（静水圧）および重力の 2 つのみで，水圧は x，y，z のすべての方向に作用し，重力は鉛直方向，すなわち z 方向のみに作用する。ここで，x，y，z の各方向における力の釣合いについて考えてみる。

まず，x および y 方向，すなわち直方体の側面に作用する力について，直方体の互いに向き合う側面においては，面積が等しく，各深さで同じ大きさの水圧が両側から互いに打ち消し合う方向に作用するため，x，y 方向での合力はいずれも常にゼロとなり力の釣合いが保たれる。

次に，z 方向，すなわち鉛直方向については，上面と底面で深さが異なるため，作用する水圧の大きさは異なり，さらに重力による作用も外力として加わる。

式 (2.1) より，上面および底面に作用する全水圧の大きさはそれぞれ $p\cdot\Delta x\Delta y$，$(p+\Delta p)\cdot\Delta x\Delta y$ であり，この直方体に作用する重力は，密度を ρ，重力加速度を g とすると，$\rho g\Delta x\Delta y\Delta z$ となる。これらが釣り合っているとき，下向きを正として，それぞれの向きを考慮すれば，

$$p\cdot\Delta x\Delta y-(p+\Delta p)\Delta x\Delta y+\rho g\Delta x\Delta y\Delta z=0$$

が成り立つ。これを整理して変形すると

$$\frac{\Delta p}{\Delta z}=\rho g$$

となり，$\Delta z\rightarrow 0$ として，以下の微分方程式が得られる。

$$\frac{dp}{dz}=\rho g$$

両辺を z で積分し，p を z の関数であらわすと

$$\int\frac{dp}{dz}dz=\int\rho g dz$$

$$\therefore\int dp=\int\rho g dz$$

$$\therefore p=\rho gz+C,\quad C\text{ は積分定数}$$

となる。

ゲージ圧で考える場合，$z=0$ のとき水圧 $p=0$ より，$C=0$ とし，変数 z を H で置き換えれば，式 (2.2) が得られる。また，絶対圧で考える場合，$z=0$ における圧力は大気圧 p_0 となるので，$C=p_0$ とすれば，式 (2.3) が得られる。

2.1.3 圧力水頭

単位重量の液体がもつエネルギーを“水柱高さ”に置き換えたものを**水頭**(すいとう)(water head または単に head)といい，とくに，圧力の大きさをそれに相当する水柱高さであらわしたものを**圧力水頭**(あつりょくすいとう)(pressure head)という。水頭の次元は長さ［L］に等しく，その単位として，m や cm，mm などが用いられる。

任意の圧力 p に対する圧力水頭 H は，式(2.2)を変形して得られる以下の式によって求められる。

$$H = \frac{p}{\rho g} \tag{2.4}$$

たとえば，1 Pa，1 hPa，1 気圧を水頭であらわすと，それぞれ 0.1020 mm，10.20 cm，10.33 m となる。

水頭は，“水柱高さ”として表現されるので，直感的に理解しやすく，また位置エネルギーや運動エネルギーといった様々な形態のエネルギーも水頭に置き換えて，同一の尺度で表現することができるので，相互の比較が容易となる。したがって，水頭は大変有用で便利な概念といえる。

用語の解説

水頭（water head または head）
単位重量の液体がもつ種々のエネルギーの大きさを水柱高さであらわしたもの。水理学では，水がもつエネルギーには**圧力水頭**(pressure head)，**位置水頭**（elevation head），**速度水頭**(velocity head)で表現できる 3 つの形態があり，これらの総和を**全水頭**(total head)といい，その水のもつ全エネルギーに相当すると考えられている。

〔例題 2.1〕

水面下 10 m の地点でのゲージ圧および絶対圧を求めよ。ただし，水の密度 $\rho = 1{,}000\ \mathrm{kg/m^3}$，大気圧 $p_0 = 101.3\ \mathrm{kPa}$ とする。

〔解〕

・ゲージ圧：式(2.2)より，

$$p = \rho g H = 1000\mathrm{kg/m^3} \times 9.8\mathrm{m/s^2} \times 10\ \mathrm{m}$$
$$= 98000\ \mathrm{N/m^2} = 98000\ \mathrm{Pa} = 98\ [\mathrm{kPa}]$$

・絶対圧：式(2.3)より，

$$p' = p + p_0 = \rho g H + p_0 = 98\ \mathrm{kPa} + 101.3\ \mathrm{kPa} = 199.3\ [\mathrm{kPa}]$$

〔例題 2.2〕

図 2.2 のような水の入った容器の各点での水圧を求めよ。ただし，水の密度 $\rho = 1{,}000\ \mathrm{kg/m^3}$ とする。

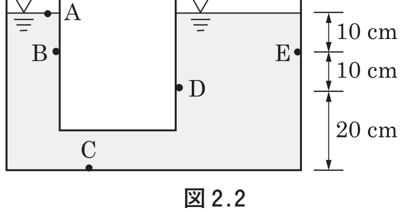


図 2.2

〔解〕

式(2.2)を使って，各点での水圧を求める。なお，単に“水圧”とされている場合は，通常，ゲージ圧で求める。

点 A：水面であるので，$p_A = 0$ kPa

点 B：$p_B = 1000 \times 9.8 \times 0.1 = 980\ [\mathrm{N/m^2}] = 980\ [\mathrm{Pa}] = 0.98\ [\mathrm{kPa}]$

点 C：$p_C = 1000 \times 9.8 \times 0.4 = 3920\ [\mathrm{N/m^2}] = 3.92\ [\mathrm{kPa}]$

メモの欄

点 D：$p_D=1{,}000\times9.8\times0.2=1{,}960$ [N/m^2]$=1.96$ [kPa]

点 E：点 B と水深が同じであり，水圧も同じ。

$p_E=p_B=0.98$ [kPa]

2.2　パスカルの原理とその応用例

2.2.1　パスカルの原理

液体には，**「密閉された状態にあるとき，液体のどこか一部に圧力が加わると，その圧力は変化することなくそのままの大きさで液体のあらゆる部分に伝わる」**という性質がある。これを**パスカルの原理**（Pascal's　principle）という。たとえば，**図 2.3** のような内部が水で満たされた容器において，ピストン（断面積 A）の上部から力 P を加えると，ピストンから水面に対して $p=P/A$ だけ圧力が加わり，水中のあらゆる部分において，これと同じ大きさの圧力 p が全ての方向から作用する。

なお，この p は，ピストン上部から力 P が加わったときの圧力の増分を示し，各点ではこれ以外に深さに応じて異なる静水圧も加わるため，実際に受ける圧力の大きさは，深さによって異なるということに注意が必要である。

以下の項では，パスカルの原理の代表的な応用例として，水圧機およびマノメータについて詳述する。

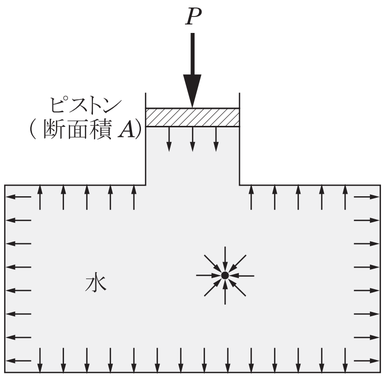


図 2.3　液体における水圧の伝達

2.2.2　水圧機

図 2.4 に示されるような，内部が液体で満たされた装置において，左側のピストン A（面積 A_1）に力 P_1 を下向きに加えると，このピストンに作用する圧力は単位面積あたりの力の大きさであるから $p=P_1/A_1$ となる。パスカルの原理により，右側のピストン B（面積 A_2）にも p と同じ大きさの圧力

メモの欄

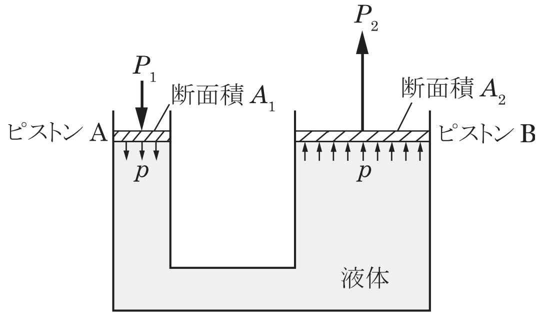


図 2.4　水圧機

が液体側から，すなわち上向きに作用し，ピストン A と同じ高さにあるピストン B の面全体では，$P_2=p\cdot A_2$という力を受けることになる。つまり，P_1とP_2の関係は以下のようになる。

$$P_2=\frac{A_2}{A_1}P_1 \tag{2.5}$$

したがって，$A_1<A_2$であれば$P_1<P_2$となり，小さな力の投入で大きな力が得られることになる。この原理を利用した装置を**水圧機**（hydraulic press）という。水圧機の身近な実用例として，油圧式ジャッキや自動車のフットブレーキなどが挙げられる。

なお，$A_1<A_2$のとき，小さな力で大きな力を得ることができる一方，ピストン B を h だけ上昇させるには，$h\cdot A_2$の体積分だけピストン A を押し下げる必要があり，その距離は $h\cdot A_2/A_1$となり，h より大きくなる（$\because A_2/A_1>1$）。

〔例題 2.3〕

図 2.4 に示された水圧機において，ピストン A および B はいずれも円形断面で，それぞれの直径が$D_1=5$ cm，$D_2=20$ cm であるとき，ピストン B によって質量 160 kg の物体を持ち上げるには，ピストン A にどれだけの力を加える必要があるか求めよ。ただし，ピストン自体の重さは無視できるものとする。

〔解〕

ピストン B において，質量 160 kg の物体を持ち上げるのに必要な力の大きさP_2を求めると，

$$P_2=160\ \mathrm{kg}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}=1568\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}=1568\ \mathrm{N}$$

ピストン A に加えるべき力の大きさ P_1は，式(2.5)を変形すると，

$$P_1=\frac{A_1}{A_2}P_2$$

となることから，

$$P_1=\frac{\frac{\pi D_1^2}{4}}{\frac{\pi D_2^2}{4}}P_2=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2P_2=\left(\frac{0.05}{0.20}\right)^2\times 1568=98\ [\mathrm{N}]$$