第 1 章

数と式

1.1　数

1.1.1　数とは

手の指を折って数えることのできる 1，2，3，$\cdots$ を **自然数** といい，自然数どうしで和，差，積，商の計算をすると，ゼロ，負，分数などの数が生じる。自然数に 0 と -1，-2，-3，$\cdots$ を付け加えたものを **整数** という。整数 a は $\dfrac{a}{1}$ であり，整数に分数を加えたものを **有理数** という。 2 つの有理数の和，差，積，商は有理数である。

分数は，$\dfrac{3}{4} = 0.75$ のように小数第何位かで終わる **有限小数** と，数字が無限に続く **無限小数** からなる。無限小数のうち $\dfrac{1}{3} = 0.3333\cdots(= 0.\dot{3})$，$\dfrac{7}{55} = 0.1272727\cdots(= 0.1\dot{2}\dot{7})$ のように，ある位から先の数字が一定の順序で繰り返される無限小数を **循環小数**（じゅんかん）という。有限小数と循環小数は必ず分数の形に表される。

数

- 複素数
  - 実数
    - 有理数
      - 整数
        - 正の整数 $\cdots$ 自然数
        - 0
        - 負の整数
      - 分数
        - 有限小数
        - 循環小数
    - 無理数 $\cdots$ 循環しない無限小数
  - 虚数 $i = \sqrt{-1}$

$\sqrt{2}$ のような 1.1414213$\cdots$ とか，π（パイ）（円周率）のような 3.141592$\cdots$ と際限なく続いていく数を **無理数** といい，無理数は分数で表すことができない。有理数と無理数を合わせたものを **実数** という。実数においても有理数と同様に 2 つの実数の和，差，積，商は実数である。

実数に対し，数の範囲を広げるために自然界には存在しない **虚数**（きょすう）を考える．虚数は i で表し，i は $\sqrt{-1}$ という数で，2 乗すれば -1 という有理数になる．実数と虚数を組み合せた数で a と b を実数として，$a+bi$ の形の数を **複素数** という。

練習 1］次の数のうち，整数，有理数，無理数はそれぞれどれか。また，小さい順に並べよ。

$$-3,\quad -\frac{5}{4},\quad 3\pi,\quad \sqrt{4},\quad 0,\quad \frac{2}{3},\quad 0.\dot{3},\quad -1.3,\quad \sqrt{14},\quad 2$$

1.1.2　素数，素因数，公約数，公倍数

1 より大きい整数で，1 とその数自身以外に約数をもたない数を **素数**（そすう）という。2，3，5，7，$\cdots\cdots$ は素数であり，1 は素数ではない。ある数を割り切ることのできる数を元の数の **約数**（やくすう）といい，約数を **因数**（いんすう）ともいう。因数が素数であるとき **素因数** といい，自然数を素数の積で表すことを **素因数分解** という。

素因数分解するときは小さい素数から順に割っていけばよい。例えば，$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ だから，12 の因数は 1，2，3，4，6，12，素因数は 2，3，素因数分解すると $2^2 \times 3$ となる。

2 つ以上の整数に共通な約数を，それらの数の **公約数**（こうやくすう）という。公約数のうち最大なものを **最大公約数** という。

16 の約数：1，2，4，8，16

24 の約数：1，2，3，4，6，8，12，24

---

16 と 24 の公約数：1，2，4，8　　最大公約数：8

2 つ以上の整数に共通な倍数のことを **公倍数** という。公倍数のうち最小のものを **最小公倍数**という。

3 の倍数：3，6，9，12，15，18，21，24，$\cdots\cdots$

4 の倍数：4，8，12，16，20，24，$\cdots\cdots$

---

3 と 4 の公倍数：12，24，$\cdots\cdots$　　最小公倍数：12

例 1］60 を素因数分解せよ。また，素因数を求めよ。

解］素因数分解は $60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

素因数は 2，3，5 である。

練習 2］24 と 54 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

1.1.3　分数

整数 a を 0 でない整数 b で割った商を $\dfrac{a}{b}$ で表し，これを **分数** という。分数 $\dfrac{a}{b}$ は 1 を b 等分したものを a 個集めたもの，または $a : b$ という比の値を意味する。分数 $\dfrac{a}{b}$ で a の部分を **分子**，b の部分を **分母** といい，「b 分(ぶん)の a」と読む。

$\dfrac{1}{2}$ のように分子が分母より小さい分数を **真(しん)分数**，$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{3}{2}$ のように分子が分母に等しいか大きい分数を **仮(か)分数**，$\dfrac{3}{7}$，$\dfrac{6}{13}$ などのように，それ以上約分できない分数を **既約(きやく)分数**，$\dfrac{3}{2}$ を $1\dfrac{1}{2}$ のように整数と真分数で表したものを **帯(たい)分数** という。

分数の分子と分母をその共通な約数で割って，簡単な分数にすることを **約分** するという。例えば，$\dfrac{3}{12}$ を約分すると，3 と 12 の共通な約数 3 で分子と分母を割って $\dfrac{1}{4}$ になる。2 つ以上の分数の分母が違うとき，それらの分数の値を変化させずに，分母が同じ分数に直すことを **通分(つうぶん)** するという。例えば，$\dfrac{5}{6}$ と $\dfrac{7}{8}$ を通分すると，6 と 8 の最大公約数は 24 であるから，$\dfrac{5 \times 4}{6 \times 4} = \dfrac{20}{24}$ と $\dfrac{7 \times 3}{8 \times 3} = \dfrac{21}{24}$ になる。

なお，分子と分母を入れかえた数をその数の **逆数** という。例えば，0 でない整数 a と b からなる分数 $\dfrac{a}{b}$ の逆数は $\dfrac{b}{a}$ である。

［**分数の計算**］ 分数の加法や減法では通分して分母をそろえる。また，除法は逆数の積にする。

(1) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{3 - 8}{12} = -\dfrac{5}{12}$

(2) $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \times 2}{4 \times 3} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

(3) $\dfrac{1}{4} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{8}$

(4) $\dfrac{\frac{14}{25}}{21} = \dfrac{14}{25} \div 21 = \dfrac{14}{25} \times \dfrac{1}{21} = \dfrac{2}{25 \times 3} = \dfrac{2}{75}$

(5) $\dfrac{20}{\frac{8}{15}} = 20 \div \dfrac{8}{15} = 20 \times \dfrac{15}{8} = \dfrac{5 \times 15}{2} = \dfrac{75}{2}$

練習 3］次の分数の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2}{0.75}$　　(2) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{7}$　　(3) $\dfrac{3}{5}\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)$　　(4) $\dfrac{5}{8}-\dfrac{5}{16}$

(5) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{9}{10}$　　(6) $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{10}$　　(7) $\dfrac{5}{6}\div\dfrac{3}{5}$　　(8) $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{4}\right)\div\dfrac{2}{10}$

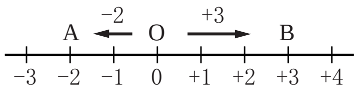
1.1.4　絶対値，累乗，平方根

絶対値

実数において，a が正の数または 0 ならば a を，a が負の数ならば $-a$ (a の符号を変えた数) を a の **絶対値** といい，$|a|$ で表す。0 の絶対値は 0 であり，一般に，絶対値 $|a|$ は 0 または正の実数である。

$$a \geqq 0 \ \text{ならば}\ |a| = a\,, \qquad a < 0\ \text{ならば}\ |a| = -a$$

例えば，数直線上で原点 O から -2 の座標に A，$+3$ の座標に B がある。A は B と反対方向に O から 2 離れており，B は O から 3 離れている。-2 は方向 $(-)$ と距離 (2) を表しており，$|-2| = 2$, $|+3| = 3$ なので，絶対値は距離（大きさ）だけを表す。



例 2］次の絶対値を計算せよ。

(1) $|2|$　　(2) $|-4|$　　(3) $|-2.3|$　　(4) $|5-5.5+0.1|$

解］(1) 2　　(2) 4　　(3) 2.3　　(4) 0.4

累乗

同じ数または同じ文字を何回か掛け合わせた積を，その数または文字の **累乗** といい，右肩に小さく掛け合わせた個数を書く。その掛け合わせた個数を表す数（a^n の n）を **指数** という。例えば，$(-3)\times(-3) = (-3)^2$ と表し，-3 の **2 乗** という。2 乗を **平方**，3 乗を **立方** ということもあり，通常，$a = a^1$ の指数 1 は省略する。

$$\underbrace{a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n} = a^n$$

一般に，m，n が正の整数のとき，次の **指数法則** が成り立つ。

指数法則

$$a^m a^n = a^{m+n}\,, \qquad (a^m)^n = a^{mn}\,, \qquad (ab)^n = a^n b^n\,, \qquad a^0 = 1$$

例 3］次の累乗を計算せよ。

(1) $(-5)^2$ (2) -5^2 (3) $\left(2^2\right)^3$ (4) $(2\times 3)^3$ (5) $2^3\times 2^4$ (6) $\left(2^0\right)^3$

解］(1) $(-5)^2=(-5)\times(-5)=25$ (2) $-5^2=-(5\times 5)=-25$

(3) $\left(2^2\right)^3=2^{\,2\times 3}=2^6=64$ (4) $(2\times 3)^3=2^3\times 3^3=216$

(5) $2^3\times 2^4=2^{3+4}=2^7=128$ (6) $\left(2^0\right)^3=1^3=1$

練習 4］次の累乗を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{3}{3}\right)^0$ (2) $\dfrac{\left(-3^0\right)^3}{\left(3^2\right)^3}$ (3) $\dfrac{5^2}{\left(5^2\right)^0}$ (4) $(-0.2\times 0.5)^2$ (5) $(0.4-0.5)^3$

平方根

負でない数 a に対して，平方すると a になる数を a の **平方根**（へいほうこん） という。正の数 a の平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ の 2 つある*。0 の平方根は 0 であり，$\sqrt{0}=0$ と定める。記号 $\sqrt{\quad}$ を **根号**（こんごう）（ルート）という。一般に n 乗根は $\sqrt[n]{\quad}$ と表し，平方根の場合は $\sqrt[2]{\quad}$ の 2 を省略する。

絶対値と平方根は a の符号によって次のように表される。また，平方根では次のことが成り立つ。

実数 a の絶対値と平方根

$a\geqq 0$ のとき $\sqrt{a^2}=|\,a\,|=a$

$a<0$ のとき $\sqrt{a^2}=|\,a\,|=-a$

平方根の公式

$a>0,\ b>0$ のとき $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$a>b>0$ のとき $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

分母に根号を含む式は有理数を分母とする式に変形して，分母に根号が含まれない式にする。これを分母を **有理化** するという。

例 4］次の計算をし，答えは分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ (3) $3\sqrt{3}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}$ (4) $\sqrt{(-3)^2}$ (5) $\sqrt{8}-\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

解］(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3\times\sqrt{6}}{2\times 6}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

* $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ をまとめて $\pm\sqrt{a}$ と書く。記号 $\pm$ を **複号** という。

(3) $3\sqrt{3}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-\dfrac{9\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0$　　(4) $|-3|=-(-3)=3$

(5) $\sqrt{8}-\dfrac{6}{\sqrt{2}}=\sqrt{2\times2\times2}-\dfrac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

練習 5］次の計算をし，答えは分母を有理化せよ。

(1) $\sqrt{3}\div\sqrt{6}$　(2) $7\sqrt{2}\div\left(-\sqrt{63}\right)$　(3) $\sqrt{90}\div\sqrt{15}$　(4) $\sqrt{15}\div\left(\sqrt{7}\times\sqrt{3}\right)$

［平方根の近似値］

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41421356$	一夜一夜に 人見ごろ	$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7320508$	人並みにおごれや
$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.2360679$	富士 山麓オウム 鳴く	$\sqrt{6}\fallingdotseq 2.44949$	似よ 良く良く
$\sqrt{7}\fallingdotseq 2.64575$	菜に 虫いない		

1.1.5　近似値

真の値に対して，真の値ではないがそれに近い値を **近似値** という。例えば，3.14159 は円周率 π の近似値であり，測定値や四捨五入して得られた値は近似値である。近似値と真の値の差を誤差という。

測定値などは末位に誤差を含む。誤差を含みながらも測定値として意味をもつ桁だけを表したものが **有効数字** である。例えば，324 の一の位を四捨五入して 320 になった数値は，十の位の 2 は信頼できるが，一の位は四捨五入されてしまい 0 は単に位を表しているだけである。このときの 3 と 2 が有効数字で，有効数字の桁は 2 桁である。有効数字をはっきりさせたい場合は 3.2×10^2 のように表す。

［例］

(1) 元の数が 3240.33 などを小数第一位を四捨五入した 3240 は，3.240×10^3 と表す。この場合の 0 は有効数字である。

(2) 100 未満の数を四捨五入して得られた近似値 78500 は 7.85×10^4 と表す。

(3) 10 未満の数を四捨五入して得られた近似値 78500 は 7.850×10^4 と表す。

切り上げ　ある数で，求めたい位に満たない端数を取り去り，求めたい位の数を 1 増やすこと。例えば，7.65432 を切り上げによって小数第二位までの概数を求めると，7.66 である。

切り捨て　ある数で，求めたい位まで取って端数を無視すること。例えば，7.65432 を切り捨てによって小数第一位までの概数を求めると，7.6 である。

四捨五入　求めたい位のすぐ下の位の数が 0，1，2，3，4 ならば切り捨て，5，6，7，8，9 ならば切り上げて概数を求めること。例えば，7.65432 を小数第二位を四捨五入すれば，7.7 である。

以上　数量がある量であるかそれよりも多いこと。例えば，a は b 以上ならば，$a\geqq b$ と表す。

以下　数量がある量であるかそれよりも少ないこと。例えば，a は b 以下ならば，$a \leqq b$ と表す。
未満　ある数に対して，その数自身は含まないでその数よりも少ないこと。例えば，a は b 未満ならば，$a < b$ と表す。

1.2　式

1.2.1　四則，文字式

加法，減法（げんぽう），乗法（じょうほう），除法（じょほう）をまとめて **四則**（しそく） という。四則の混じった計算では次の決まりがある。

1. 括弧のある式の計算では括弧の中を先に計算する。
2. 累乗のある式の計算では累乗を先に計算する。
3. 加減と乗除の混じった計算では乗除を先に計算する。

［例］

(1) $10-(-3)\times(-5)=10-(+15)=-5$
(2) $12\div(5-8)=12\div(-3)=\dfrac{12}{-3}=-4$
(3) $-10\div(-5)^2\times 3=-10\div 25\times 3=\dfrac{-10\times 3}{25}=-\dfrac{6}{5}$
(4) $56\times 9\div 21=\dfrac{56\times 9}{21}=\dfrac{56\times 3}{7}=24$
(5) $40\div 5\times 2=\dfrac{40\times 2}{5}=16$
(6) $17+3\times 4=17+12=29$
(7) $3\times 70-65\div 5=210-13=197$

いろいろな数量を文字を使って表すことがある。数や文字を含んだ式の表し方には次の決まりがある。

1. 数の場合と同様に文字も a と b の和は $a+b$，差は $a-b$ と書く。
2. 乗法の記号 $\times$ は数と数の積以外は省略する。$a\times b \Rightarrow ab$，$3\times a \Rightarrow 3a$
3. 数と数の積では記号 $\times$ の代わりに $\cdot$ を使うことがある。$2\times 3 \Rightarrow 2\cdot 3$
4. 数と文字の積は数を先に書き，2 つ以上の文字の積はできるだけアルファベット順に書く。$c\times b\times 3\times x \Rightarrow 3bcx$
5. 負数と文字の積では括弧を付けずに書く。$x\times(-2) \Rightarrow -2x$
6. 括弧でくくられた式は 1 つの文字と考える。$a\times(a-b)\times 2 \Rightarrow 2a(a-b)$

7. 文字の前の1や -1 は1を省略する。 $1 \times x \Rightarrow x$，$a \times (-1) \Rightarrow -a$
8. 同じ数あるいは文字の積は累乗の形に書く。 $a \times a \Rightarrow a^2$
9. 文字の混じった割り算では記号 $\div$ を使わずに, 分数の形で書く。$2 \div a \Rightarrow \dfrac{2}{a}$

［例］

(1) $b \times a \times d \times c \Rightarrow abcd$　　(2) $4 \times a + 3 \Rightarrow 4a + 3$

(3) $x \times x \times (-5) - 3 \times y \Rightarrow -5x^2 - 3y$　　(4) $a \times a \times a + 3 \Rightarrow a^3 + 3$

(5) $(a - b) \times (-3) \Rightarrow -3(a - b)$　　(6) $(x + y) \div z \Rightarrow \dfrac{x + y}{z}$

(7) $x + y \div z \Rightarrow x + \dfrac{y}{z}$　　(8) $x \div (y + z) \Rightarrow \dfrac{x}{y + z}$

(9) $x \div y \div z \Rightarrow \dfrac{x}{yz}$　　(10) $x \div y \times z \Rightarrow \dfrac{xz}{y}$

1.2.2　整式

2，a，$3x$，$2abxy$，$-3x^3y^2$ のように，数や文字の積として表される式を **単項式** という。単項式において，掛け合わせる文字の個数をその単項式の **次数**，文字以外の数の部分を **係数** という。2種類以上の文字を含む単項式では，ある特定の文字に着目して，他の文字を係数と同じようにみなして取り扱うことがある。例えば，$-3x^3y^2$ の単項式の次数は5，係数は -3 であるが，x に着目すると次数は3，係数は $-3y^2$ である。

いくつかの単項式を和の形で表した式を **多項式** といい，その1つ1つの単項式を多項式の **項**（こう），単項式と多項式を合わせて **整式**（式を整理したとき分母や根号の中に文字が含まれていない式）という。例えば，$5ax^2 + by^2$，$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ などである。

整式では，ある特定の文字に着目して整理した後の式に含まれる項の次数のうち，最高のものをその整式の次数という。ある特定の着目した文字を含まない項を **定数項** といい，定数項の次数は0である。

例えば，$2x^2 + 5xy^2 + 3y - 6x + 4$ は x，y についての整式とみれば，次数は3，定数項は4である。しかし，x についての整式とみなせば，$2x^2 + (5y^2 - 6)x + 3y + 4$ と整理でき，次数は2，定数項は $3y + 4$ である。また，文字の部分が全く同じ項を **同類項** といい，ここでは $5xy^2$ と $-6x$ が x についての同類項である。

このように整式を整理するとき，ある文字について次数の高い項から低い項へ順に整理することを，**降**（こう）**べきの順** に整理するといい，次数の低い項から高い項へ

順に整理することを，**昇（しょう）べきの順** に整理するという。

式を整理したとき分母や根号の中に文字が含まれていないものを整式というが，分母に文字を含み，根号の中には文字を含まない式を **分数式** という。例えば，$\dfrac{x^3}{\sqrt{2}(a-b)}$，$ax+\dfrac{b}{x}$ などは分数式である。整式と分数式をあわせて **有理式** といい，根号の中に文字を含む式を **無理式** という。例えば，$\sqrt{1+x}$，$\sqrt{x}-3$，$a\sqrt{x}-\sqrt{x^2+2}$ などは，x についての無理式である。

例 5］次の整式を，x について降べきの順に整理せよ。

(1) $2x^2+4x+1+3x^2$　　(2) $4x^2+x^3-2x-x^2+2x^3+7$

解］(1) 与式 $=(2+3)x^2+4x+1=5x^2+4x+1$

(2) 与式 $=(1+2)x^3+(4-1)x^2-2x+7=3x^3+3x^2-2x+7$

例 6］次の分数式と無理式を計算せよ。

(1) $\dfrac{a+b}{3x}-\dfrac{b}{2x}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}$

解］(1) 与式 $=\dfrac{(a+b)\times 2}{3x\times 2}-\dfrac{b\times 3}{2x\times 3}=\dfrac{2a+2b-3b}{6x}=\dfrac{2a-b}{6x}$

(2) 与式 $=\dfrac{\sqrt{x}-3+2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}+3}{x-9}$

練習 6］次の式を計算せよ。

(1) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}x+3\right)\left(\sqrt{7}x-3\right)$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

1.2.3　整式の乗法

整式の加法，減法および乗法では，数の場合と同様に，次の基本法則が用いられる。

基本法則

交換法則	$A+B=B+A$,	$AB=BA$
結合法則	$(A+B)+C=A+(B+C)$,	$(AB)C=A(BC)$
分配法則	$A(B+C)=AB+AC$,	$(A+B)C=AC+BC$

単項式と多項式の積，または，いくつかの多項式の積の形の式を，積を計算して 1 つの整式に表すことを，その式を **展開** するという。

展開に用いられる公式には，次のものがある。

乗法の公式

［1］ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

［2］ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

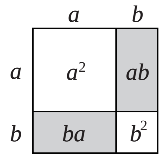
［3］ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

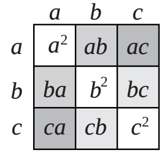
［4］ $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

［5］ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

［6］ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

［7］ $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$　　（複号同順）





例 7］次の式を展開せよ。

(1) $4x(x^2+2x-3)$　　(2) $(4x+5)(x^2+3x-1)$

(3) $(x-y)(x+y)$　　(4) $(2x+1)^2$　　(5) $(x-y+1)(x+y)$

解］(1) 与式 $= 4x^3 + 8x^2 - 12x$

(2) 与式 $= 4x^3 + 12x^2 - 4x + 5x^2 + 15x - 5 = 4x^3 + 17x^2 + 11x - 5$

(3) 与式 $= x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$

(4) 与式 $= (2x+1)(2x+1) = 4x^2 + 2x + 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$

(5) 与式 $= x^2 + xy - xy - y^2 + x + y = x^2 + x - y^2 + y$

例 8］次の式を展開せよ。

(1) $(a-b+c)(a+b-c)$　　(2) $(x-y)^2(x+y)^2$

解］(1) 与式 $= \{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\} = a^2 - (b-c)^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

(2) 与式 $= \{(x-y)(x+y)\}^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

練習 7］次の式を展開せよ。

(1) $(a+b-2)^2$　(2) $(a+b+c)^3$　(3) $(a+b-c)^3$　(4) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

1.2.4　因数分解

1 つの整式 A を，2 つ以上の整式 B，C，$\cdots$ の積の形に書き改めることを A を **因数分解**（いんすう） するといい，B や C などを A の **因数** という。因数分解は展開の逆の操作であり， 乗法の公式で逆（右辺から左辺）のことが成り立つ。

$x^2 - 10x + 21$ の因数分解は $(x+a)(x+b)$ の形で表すことであり，これは $x^2 + (a+b)x + ab$ であることから $a+b = -10$，$ab = 21$ となる a と b を求めれ

ばよい。積が 21 となる数は 3 と 7 あるいは -3 と -7 であり，加算して -10 になる数は -3 と -7 であることから，$(x-3)(x-7)$ に因数分解される。

x の 2 次式 px^2+qx+r を

$$px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$$

のように因数分解するには

$$ac=p\,,\qquad bd=r$$

を満たす a，b，c，d のうち

$$ad+bc=q$$

となる a，b，c，d を見つければよい。

$$\begin{array}{ccc} a & b & \to bc \\ c & d & \to ad \\ \hline ac & bd & ad+bc \end{array}$$

因数分解は次の点を考慮して行うとよい。

1. 共通因数があればまずそれをくくり出した後，さらに因数分解をする。

$3ax^2-12a=3a(x^2-4)=3a(x^2-2^2)=3a(x+2)(x-2)$ のように，a だけでなく 3 も共通因数であるので $3a$ をくくり出す。

2. 式の中に共通な部分があれば他の文字に置き換えて因数分解をする。

$(x+y)^2-10(x+y)+21$ を因数分解する際は，$x+y$ を他の文字に置き換える。この場合，$x+y=A$ と置くと

$$(x+y)^2-10(x+y)+21=A^2-10A+21=(A-3)(A-7)=(x+y-3)(x+y-7)$$

に因数分解される。

3. 2 つ以上の文字を含む整式では，1 つの文字について整理すると因数分解が簡単になることがある。

$x^2-2y+xy-2x$ において次数の低い y について整理をする。

$$x^2-2y+xy-2x=(x-2)y+x^2-2x=(x-2)y+(x-2)x=(x-2)(x+y)$$

4. 特定の文字について降べきの順に整理する。

$2x^2+xy-y^2+2x+8y-12$ の因数分解では，x について降べきの順に整理し，定数項の y の式を因数分解する。

$$\begin{aligned}2x^2+xy-y^2+2x+8y-12&=2x^2+(y+2)x-(y^2-8y+12)\\&=2x^2+(y+2)x-(y-2)(y-6)=(x+y-2)(2x-y+6)\end{aligned}$$

例 9］次の式を因数分解せよ。

(1) x^2+2x-8　　(2) $2x^2+3x+1$　　(3) $2x^2+5x-3$　　(4) $4x^2-4x-3$

解］(1) 与式 $=(x+4)(x-2)$　　(2) 与式 $=(2x+1)(x+1)$

(3) 与式 $=(2x-1)(x+3)$　　(4) 与式 $=(2x+1)(2x-3)$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 4 & \longrightarrow & 4 \\
1 & -2 & \longrightarrow & -2 \\
\hline
2 & -8 & & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
2 & 1 & \longrightarrow & 2 \\
1 & 1 & \longrightarrow & 1 \\
\hline
2 & 1 & & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
2 & -1 & \longrightarrow & -1 \\
1 & 3 & \longrightarrow & 6 \\
\hline
2 & -3 & & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
2 & 1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & -3 & \longrightarrow & -6 \\
\hline
2 & -3 & & -4
\end{array}
$$

練習 8］次の式を因数分解せよ。

(1) a^4-6a^2+8　　(2) x^3-8y^3　　(3) $2x^2-3xy-3x+y^2-9$

(4) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$　　(5) $(x^2+x-13)(x^2+x-1)+11$

1.2.5　整式の除法

整式の除法では整式を降べきの順に整理して，整数の場合と同様の方法で商と余りを求めることができる。例えば

$$A=x^3+x^2-x-1\,, \qquad B=x^2+2x-1$$

については，$A\div B$ は次のようにして計算する。

$$
\begin{array}{rlll}
 & \phantom{x^3+{}}x-1 & & \\
\cline{2-2}
B\cdots x^2+2x-1 \,\big) & x^3+\ \ x^2-x-1 & \cdots A & \\
 & x^3+2x^2-x & \cdots\cdots & B\,x \\
\cline{2-2}
 & \quad -x^2 \qquad\ -1 & \cdots A-B\,x & \\
 & \quad -x^2-2x+1 & \cdots\cdots & B\times(-1) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x-2 & \cdots A-B\,x-B\times(-1) &
\end{array}
$$

上の計算では，残りが B より次数の低い式 $2x-2$ となったところで終わる。すなわち

$$A=B\times(x-1)+2x-2$$

である。

一般に，A，B を同じ 1 つの文字についての整式とし，$B\neq 0$ のとき

$$A=B\,Q+R \qquad \text{但し，} R \text{ は } 0 \text{ か } (R\text{ の次数})<(B\text{ の次数})$$

となる整式 Q と R が定まる。Q および R をそれぞれ，A を B で割ったときの **商** および **余り** という。余りが 0 のとき，A は B で **割り切れる** という。

例 10］整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

$$A=2x^2+7x+3\,, \quad B=x+3$$

解］

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & \quad 2x+1 \\ \cline{2-2}
x+3 \,\big) & 2x^2+7x+3 \\
 & 2x^2+6x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad x+3 \\
 & \qquad\quad x+3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

よって，$A=(x+3)(2x+1)$ となり，商は $2x+1$，余りは 0 で，この場合は因数分解された。

例 11］$3x^3+4x^2-15x+5$ を整式 B で割ると，商は $3x-2$，余りは $-2x-1$ である．B を求めよ。

解］$3x^3+4x^2-15x+5=B\,(3x-2)-2x-1$

ゆえに　　$B\,(3x-2)=3x^3+4x^2-13x+6$

したがって　$B=(3x^3+4x^2-13x+6)\div(3x-2)=x^2+2x-3$

練習 9］x についての整式と考えて，$(2x^2-5ax+a^2)\div(2x+a)$ の商と余りを求めよ。

演　習　問　題

1. 次の数は有理数，無理数のどちらか。

(1) $-\pi$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　(3) $\sqrt{16}$　(4) $\sqrt{0.25}$　(5) $5+\sqrt{5}$　(6) $\sqrt{196}$

2. a の範囲が次の場合，$|\,a+2\,|+|\,a-4\,|$ を簡単にせよ。

(1) $a<-2$　(2) $-2\leqq a<4$　(3) $a\geqq 4$

3. $a=5$，$b=-7$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $|\,a\,|+|\,b\,|$　(2) $|\,a+b\,|$　(3) $|\,a\,|-|\,b\,|$　(4) $|\,a-b\,|$

4. 次のことに誤りがあれば，下線の部分を訂正せよ。

(1) $\sqrt{9}+\sqrt{15}$ は $\sqrt{9+15}$ と計算 $\underline{\text{できる}}$　(2) $\sqrt{0.01}$ は $\underline{0.1}$ である

(3) $\sqrt{9}\times\sqrt{15}$ は $\sqrt{9\times 15}$ と計算 $\underline{\text{できる}}$　(4) $\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ は $\underline{\ 5\ }$ に等しい

(5) $\sqrt{16}-\sqrt{9}$ は $\underline{\sqrt{7}}$ に等しい　(6) $\sqrt{25}$ は $\underline{\pm 5}$ である

(7) $\sqrt{(-7)^2}$ は $\underline{-7}$ に等しい　(8) 81 の平方根は $\underline{\ 9\ }$ である

5. 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{7}{9}-\dfrac{4}{5}$　(2) $\dfrac{1}{6}\div\dfrac{5}{7}$　(3) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}$

(4) $\dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}$　(5) $a\times a^3\div a$　(6) $\sqrt{64}$

(7) $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$　(8) $\bigl|\,|-1|-|-2|\,\bigr|$　(9) $2\div 0.25$

(10) $3\times\bigl\{5+(7-1)\times 2\bigr\}-5\times(5-4\div 2)$

(11) $3.53\times 2.58+3.53\times 5.06+2.36\times 3.53$

6. 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times 3\sqrt{6}$　(2) $4\sqrt{35}\div 2\sqrt{75}\times\sqrt{15}$

(3) $\sqrt{18}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}$　(4) $3\sqrt{27}+2\sqrt{48}-\sqrt{108}$

(5) $(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$　(6) $(\sqrt{14}+\sqrt{6})(\sqrt{14}-\sqrt{6})$

(7) $\sqrt{11}\times\sqrt{66}\times\sqrt{121}$　(8) $\sqrt{72}+\sqrt{9}$

(9) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{1}}{\sqrt{5}-\sqrt{1}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{1}}{2}$　(10) $\dfrac{1}{\sqrt{20}}+\dfrac{2}{\sqrt{45}}$

7. $\sqrt{3.4}=1.844$，$\sqrt{34}=5.831$ として，次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{0.34}$　(2) $\sqrt{340}$　(3) $\sqrt{3400}$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ の分母を有利化せよ。

9. $x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2

10. 分数式 $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{2}{x+1}$ を通分せよ。

11. 次の式を因数分解せよ。

(1) $-15ab^2+35a^2b-20a^3$　(2) $xy-y-x+1$

(3) $(x+3)^2-(y-3)^2$　(4) $2a^2-8b^2$　(5) a^2-b^2+2a+1

12. $6x^4-x^3-14x^2+4x+8$ を整式 B で割ると，商は $2x^2+x-2$，余りは $3x+2$ である。B を求めよ。

13. 整式 A を $x+1$ で割ると，商が B，余りが -2 であった。その商をさらに $x+1$ で割ると，商が x^2+1，余りが 1 となった。整式 A を $(x+1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

第 2 章

方程式と不等式

2.1　方程式

2.1.1　方程式とは

式や文字・数が等号（＝，イコール）で結ばれているものを等式という。等式は等号の右辺と左辺が等しいことを示しており，文字を含む等式には恒等式と方程式の 2 つの種類がある。

等式でその中の文字にどのような値を代入しても常に成り立つものを **恒等（こうとう）式** といい，例えば，$2(x+y)=2x+2y$， $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$ などは，x，y にどのような値を代入しても常に成り立つ等式である。a，b，c，a'，b'，c' が実数で，等式 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x について恒等式であるための条件は，同じ次数の項が一致するときである。すなわち，$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$ となるときである。

これに対して $3x-2=5$，$3x+y=6$，$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ などは，x や y がある特別の値をとるときに限って成り立つ等式である。このような等式を **方程式** といい，方程式を満たす x の値を **解** という。方程式にはいろいろな種類があり，方程式は求める未知数の個数を **元（げん）** で表し，求める未知数の次数を **次（じ）** で表す。例えば，$ax+b=0$ は求める未知数は x の 1 つだけで，x は 1 次なので，1 元 1 次方程式，普通は略して 1 次方程式という。

2 つ以上の未知数を含む 2 つ以上の方程式を組にし，未知数はそのすべての方程式を同時に満足することを要求されているものを **連立方程式** という。未知数が

2 つで，その未知数についての次数が 1 次と 2 次，または，2 次と 2 次の方程式の組からなる連立方程式を **連立 2 元 2 次方程式** という。また，3 つの未知数について，未知数の次数が 1 次の 3 元 1 次方程式の組からなる連立方程式を **連立 3 元 1 次方程式** という。

一般に，未知数が m 個，未知数の最高の次数が n 次の連立方程式を連立 m 元 n 次方程式という。

主な方程式を次に示す。

方程式のいろいろ

x，y が未知数，$a \sim h$ が実数のとき

1 元 1 次方程式

$$ax + b = 0$$

1 元 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

2 元 1 次方程式

$$ax + by + c = 0$$

連立 2 元 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

連立 2 元 2 次方程式

$$\begin{cases} ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0 \\ fx + gy + h = 0 \end{cases}$$

3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

無理方程式

$$\sqrt{ax + b} + cx + d = 0$$

例 1］等式 $x^2 + 3x - 9y^2 - 3y + a = (x + 3y + b)(x - 3y + c)$ が，x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解］等式の右辺を展開して整理すると

$$x^2 + 3x - 9y^2 - 3y + a = x^2 + (b + c)x - 9y^2 - 3(b - c)y + bc$$

となる。これが恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$$b + c = 3, \quad b - c = 1, \quad bc = a$$

よって　$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1$

練習 1］等式 $2x^2 + ax - 12 = (2x - b)(x - 3)$ が，x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

2.1.2　1 次方程式，連立 1 次方程式

1 次方程式の解は，項を移項するなどの式を変形して求める。連立方程式の解き方には，一方の式を他方の式に代入して文字を 1 つだけ含む方程式をつくり，1 元 1 次方程式にして解く **代入法** と，ある文字の係数の絶対値をそろえて式どうしを加減して，1 つの文字を消去して解く **加減法** がある。

［連立 2 元 1 次方程式の解の求め方］

代入法

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ 2x+5y=14 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①式を x について解くと

$x=-y+4$　$\cdots\cdots$ ①'

①' を ②式に代入する

$2(-y+4)+5y=14$

$y=2$　$\cdots$ ③

③を①' 式に代入すると

$x=2$

よって　$x=2$，$y=2$

加減法

$$\begin{cases} 3x+2y=13 & \cdots\cdots ① \\ 2x+5y=16 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

x の係数の絶対値を同じにするために

①式に 2 を，②式に 3 を掛けて引く

$$\begin{array}{rl} 6x+4y=26 & \cdots\cdots ①' \\ \underline{-)\ 6x+15y=48} & \cdots\cdots ②' \\ -11y=-22 & y=2 \quad \cdots ③ \end{array}$$

③を ①式に代入すると

$x=3$

よって　$x=3$，$y=2$

例 2］1 個 110 円のリンゴを 3 個と 1 個 80 円のオレンジを数個買って，810 円を支払った。オレンジを何個買ったのか。

解］オレンジを x 個買ったとすると　$110\times 3+80\times x=810$

x について解くと　$x=6$　となり，オレンジを 6 個買った。

例 3］ある集落の昨年の男女の人数は合計で 470 人であった。しかし，今年は昨年に比べて男性で 5%，女性で 2% 減少し，合わせて 16 人の人口減であるという。昨年は男性と女性は何人いたのか。また，今年の男性と女性は何人か。

解］昨年の男性の人数を x 人，女性を y 人とすると

$$x+y=470\ ,\ -\frac{5}{100}x-\frac{2}{100}y=-16 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y=470 & \cdots① \\ 5x+2y=1600 & \cdots② \end{cases}$$

① 式の $y=470-x$ を ② 式に代入して　$x=220$，　$y=250$

よって，昨年は男性 220 人，女性は 250 人いた。

$$x'=x\times 0.95=209\ ,\qquad y'=y\times 0.98=245$$

また，今年は男性 209 人，女性は 245 人いる。

例 4］A 町と B 町は 220 km 離れており，高速道路と一般道を使って 3 時間 40 分かかった。自動車の平均速度を高速道路 90 km/h，一般道 35 km/h とすると，高速道路および一般道の走行時間を求めよ。

解］高速道路の走行時間を x，一般道の走行時間を y とすると

連立方程式 $\begin{cases} 90x + 35y = 220 & \cdots\cdots \text{距離} \\ x + y = \dfrac{11}{3} & \cdots\cdots \text{時間に換算} \end{cases}$ が成り立つ。

これを代入法で解くと $\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = 2 \end{cases}$

よって，高速道路の走行時間は 1 時間 40 分，一般道の走行時間は 2 時間 である。

練習 2］次の方程式を解け。

(1) $5 + 2(3x - 1) = 4x - 3$　　(2) $2 + 5x = 3x - 6$

(3) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2x-1}{2} = 1$　　(4) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5(x-2)}{6}$　　(5) $|\,x-2\,| + |\,x-1\,| = x$

(6) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 1.1 \\ 0.05x - 0.21y = -1.15 \end{cases}$　　(7) $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

2.1.3　2 次方程式

a，b，c が実数で $a \neq 0$ のとき，$ax^2 + bx + c = 0$ の形で表される方程式を x についての **2 次方程式** といい，これを満たす x の値を方程式の **解** という。2 次方程式の解き方には平方根の考え方を用いる解き方や因数分解を用いた解き方があり，解の公式を用いて解くこともある。その解の公式は次のように変形して求める。

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && \text{2 次方程式の一般形} \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \text{定数項を移項し，両辺を } a \text{ で割る} \\ x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} && \text{左辺を } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \text{ の形に変形する} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \text{左辺は } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \text{ の形} \end{aligned}$$

となり，$b^2 - 4ac \geqq 0$ とすると，右辺の値は正または 0 であるから

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

したがって，2 次方程式の解は　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

である。これを 2 次方程式の **解の公式** という。$b^2-4ac \geqq 0$ のとき解は実数である。

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$ の解は

$$b^2-4ac \geqq 0 \text{ のとき} \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1 次の項の係数が偶数であるならば，$b=2b'$ とおくと

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

となる。

例 5］次の 2 次方程式を，解の公式を用いて解け。

(1) $2x^2+3x-5=0$ (2) $5x^2-4x-1=0$ (3) $9x^2-12x+4=0$

解］(1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{-3\pm 7}{4}$

よって $x=-\dfrac{5}{2},\quad 1$

(2) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-5\cdot(-1)}}{5}=\dfrac{2\pm\sqrt{9}}{5}=\dfrac{2\pm 3}{5}$

よって $x=-\dfrac{1}{5},\quad 1$

(3) $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-9\cdot 4}}{9}=\dfrac{6\pm\sqrt{0}}{9}=\dfrac{2}{3}$ よって $x=\dfrac{2}{3}$

練習 3］次の 2 次方程式を，解の公式を用いて解け。

(1) $x^2+5\sqrt{2}x+8=0$ (2) $2x^2-3x+1=0$ (3) $25x^2-30x+9=0$

2.1.4 複素数

a，b，c が実数で $a \neq 0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の b^2-4ac が負であるときは，実数の範囲では解は存在しない。そこで，このような方程式も解をもつように，数の範囲を広げて考える。

実数の範囲ではどのような数も 2 乗すると 0 以上の数になる。しかし，$x^2=-1$ となる x は実数の範囲では存在しないため，2 乗すると -1 になるような新しい数を考える。すなわち

$$i^2=-1$$

であるような新しい数 i* を考え，i を **虚数単位**，$\sqrt{5}\,i$ などのように i を含む数を **虚数**（きょすう） という。

虚数に対してこれまで扱ってきた有理数と無理数をまとめて実数といい，実数と虚数をまとめて **複素数** という。すなわち，複素数とは実数 a，b と i から構成される数

$$a+b\,i\quad（a,\ b\text{ は実数}）$$

で，a を **実部**，b を **虚部** という。複素数 $z=a+b\,i$ に対して，虚部の符号を変えた $a-b\,i$ を z の **共役な複素数** といい，$\overline{z}$ で表す。また，$\overline{z}$ の共役な複素数は z であるので，z と $\overline{z}$ は互いに共役であるともいう。

複素数の四則演算は，i を文字のように取り扱って，整式と同じように計算し，i^2 が現れたならば，それを -1 で置き換えればよい。

$$(-i)^2=i^2=-1$$

複素数の相等と四則計算

a，b，c，d が実数のとき

$$a+b\,i=0 \iff a=0\,,\quad b=0$$
$$a+b\,i=c+d\,i \iff a=c\,,\quad b=d$$
$$(a+b\,i)\pm(c+d\,i)=(a\pm c)+(b\pm d)\,i\qquad（\text{複号同順}）$$
$$(a+b\,i)(c+d\,i)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$
$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i\qquad（\text{但し，}c+d\,i\neq 0）$$

負の数の平方根

a が正の数のとき，$x^2=-a$ を満たす数 x，すなわち，負の数 $-a$ の平方根は実数の範囲では存在しない。しかし，数の範囲を複素数まで広げて考えると

$$(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2\,i^2=-a\,,\qquad(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2\,i^2=-a$$

であるから，$\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$ は，ともに $-a$ の平方根である。

負の数の平方根

$a>0$ のとき　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に，　$\sqrt{-1}=i$

$$\left(\pm\sqrt{-a}\right)^2=-a$$

* i は，imaginary number の頭文字である。

根号の中が負の数のときは，i を用いた形に書き換えて計算を行う。例えば，下記の例のような平方根どうしの乗法を，複素数では安易に行ってはいけない。なぜなら，平方根の性質†は，実数に対して成り立つ関係式であるからである。

○	$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\left(\sqrt{2}\,i\right)\left(\sqrt{3}\,i\right)=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$
×	$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$

例 6］次の計算をせよ。

(1) $(-4\,i)^2$　(2) i^5　(3) i^{100}　(4) $(2+5\,i)+(3-i)$

(5) $(3+4\,i)-(2-3\,i)$　(6) $(4+i)(-2+3\,i)$　(7) $\dfrac{1+3\,i}{3+2\,i}$

解］(1) 与式 $=(-4)^2\times i^2=-16$　(2) 与式 $=(i^2)^2\times i=(-1)^2\times i=i$

(3) 与式 $=(i^4)^{20}=1^{20}=1$　(4) 与式 $=(2+3)+(5-1)\,i=5+4\,i$

(5) 与式 $=(3-2)+(4+3)\,i=1+7\,i$

(6) 与式 $=-8+(12-2)\,i+3\,i^2=-11+10\,i$

(7) 与式 $=\dfrac{(1+3\,i)(3-2\,i)}{(3+2\,i)(3-2\,i)}=\dfrac{9+7\,i}{9-4\,i^2}=\dfrac{9}{13}+\dfrac{7}{13}\,i$

例 7］2 次方程式 $x^2+6x+13$ を，複素数の範囲で因数分解せよ。

解］$x^2+6x+13=0$ の解は　$x=-3\pm\sqrt{-4}=-3\pm 2\,i$

したがって，　$x^2+6x+13=(x+3-2\,i)(x+3+2\,i)$　に因数分解される。

練習 4］次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-3}\sqrt{-4}$　(2) $\sqrt{(-3)\cdot(-4)}$　(3) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{-6}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{6}}$　(5) $\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-6}}$

(6) $(\sqrt{-3})^2$　(7) $(1-i)^3$　(8) $i^3+\dfrac{1}{i^3}$　(9) $\dfrac{1+i}{2-3\,i}$　(10) $\dfrac{5-\sqrt{2}\,i}{1+\sqrt{2}\,i}$

判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の 2 つである。しかし，$b^2-4ac=0$ の場合は解は 1 個であるし，$b^2-4ac<0$ の場合は実数の解が存在しないが，複素数の解は存在する。このように 2 次方程式の解は，b^2-4ac の値によって異なる。

一般に，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は b^2-4ac の値により数の範囲が決まるため，$D=b^2-4ac$ とおく。D を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の **判別式**

† 「第 1 章 1.4 絶対値，累乗，平方根」を参照。

といい，判別式で解を判別する。なお，解が実数のものを **実数解** といい，$D>0$ のときは異なる 2 つの実数解をもち，$D=0$ のときは $-\dfrac{b}{2a}$ のただ 1 つの実数解（**重解**（じゅうかい）という）をもつ。また，$D<0$ のときは異なる 2 つの **虚数解**をもつ。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と，その判別式 $D=b^2-4ac$ の関係は，次のようになる。

2 次方程式の解の判別

［1］$D>0$　のとき　異なる 2 つの実数解をもつ

［2］$D=0$　のとき　1 つの実数解（重解）をもつ

［3］$D<0$　のとき　異なる 2 つの虚数解をもつ

例 8］2 次方程式 $3x^2+5x+2=0$ の実数解の個数はいくつか。

解］判別式 $D=5^2-4\cdot3\cdot2=1>0$　よって，実数解の個数は 2 個である。

例 9］2 次方程式 $2x^2+8x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつように，定数 a の範囲を求めよ。

解］判別式 $D=8^2-4\cdot2\cdot a=64-8a$

異なる 2 つの実数解をもつには $D>0$ であるため，$64-8a>0$

よって　$a<8$

例 10］a を定数とするとき，2 次方程式 $x^2-ax+a+8=0$ の解を判別せよ。

解］判別式 $D=(-a)^2-4(a+8)=(a+4)(a-8)$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$　すなわち，　$a<-4$，$a>8$　のとき異なる 2 つの実数解

$D=0$　すなわち，　$a=-4$，8　のとき実数の重解

$D<0$　すなわち，　$-4<a<8$　のとき異なる 2 つの虚数解

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解の公式より

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}$$

よって，2 次方程式の解と係数の間には，次の関係がある。

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\,,\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

---

2 次方程式を因数分解することで解を求めることができる。逆に，2 次方程式の解を知ることによって，2 次方程式を因数分解することができる。

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$

の 2 つの解を α，β とすれば，解と係数の関係より

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

2 次方程式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

例 11］2 次方程式 $x^2+3x-2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

解］解と係数の関係より $\alpha+\beta=-3\,,\quad \alpha\beta=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2(-2)=13$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-3)^3-3(-2)(-3)=-45$

例 12］2 次方程式 $6x^2-17x-14$ を因数分解せよ。

解］2 次方程式 $6x^2-17x-14=0$ の解は，解の公式により

$$x=\frac{17\pm\sqrt{625}}{12}=\frac{17\pm 25}{12}$$

すなわち　$x=\dfrac{7}{2}\,,\quad x=-\dfrac{2}{3}$

よって　$6x^2-17x-14=6\left(x-\dfrac{7}{2}\right)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=(2x-7)(3x+2)$

例 13］次の 2 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^2-9=0$　　(2) $x^2+8x=9$　　(3) $x^2+6x-1=0$

解］(1) $x^2=9$ より，x が 9 の平方根であるから　$x=\pm 3$

(2) $x^2+8x+4^2=9+4^2$

$(x+4)^2=25$　　両辺を平方して　$x+4=\pm 5$

$x=-4\pm 5$　　よって　$x=1,\ -9$

(3) $x^2+6x=1$

$x^2+6x+9=1+9$

$(x+3)^2=10$　　両辺を平方して　$x+3=\pm\sqrt{10}$

よって　$x=-3\pm\sqrt{10}$

2.2　高次方程式

因数定理

x についての整式を $P(x)$，$f(x)$ などの記号で表し，整式 $P(x)$ の変数 x に特定の値 α を代入したときの整式の値を $P(\alpha)$ と表す。例えば

$$P(x)=x^3+3x^2-4 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

において，x に 2 を代入すると

$$P(2)=2^3+3\cdot 2^2-4=16$$

となる。

ここで，整式を 1 次式で割ったときの余りについて考える。「第 1 章 2.5 整式の除法」で示した方法で，① 式を 1 次式 $x-2$ で割ると

$$P(x)=(x^2+5x+10)(x-2)+16$$

となり，余りは $P(2)$ と同じになる。また，① 式を 1 次式 $x-1$ で割ると，$P(1)=0$，$P(x)=(x^2+4x+4)(x-1)$ となり，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

一般に，整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは x を含まない。なお，このときの商を $Q(x)$，余りを R とすると，R は定数で

$$P(x)=(x-\alpha)\,Q(x)+R$$

となる。ここで，$x=\alpha$ とおくと

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)\,Q(\alpha)+R=R$$

よって，次の **剰余（じょうよ）の定理** が成り立つ。

剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは　$P(\alpha)$

剰余の定理より

$$P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる} \iff P(\alpha)=0$$

となり，次の **因数定理**（いんすう）が成り立つ。

因数定理

1 次式 $x-\alpha$ が整式 $P(x)$ の因数である $\iff$ $P(\alpha)=0$

高次方程式

$P(x)$ が x についての n 次の整式で，$P(x)=0$ と表される方程式を，x についての $\boldsymbol{n}$ **次方程式** という。なお，3 次以上の方程式を一般に **高次方程式** という。高次方程式 $P(x)=0$ は，因数定理による因数分解を利用することで簡単に解くことができる。

例 14］因数定理を用いて，$x^3-7x-6=0$ を解け。

解］$P(x)=x^3-7x-6$ とおくと

$$P(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。$\big(x+1$ は $P(x)$ の因数である$\big)$

整式の除法で示した方法で，$P(x)$ を $x+1$ で割ると

$$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)=(x+1)(x+2)(x-3)$$

よって，求める解は　-2，　-1，　3

例 15］整式 $P(x)=2x^3+ax+4$ が $x-1$ で割り切れるように，定数 a の値を求めよ。

解］$P(x)$ が $x-1$ で割り切れるための条件は　$P(1)=0$

すなわち　$P(1)=2+a+4=0$ ，　　ゆえに　$a=-6$

例 16］因数定理を用いて，$x^3-2x^2-5x+6=0$ を解け。

解］$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とおくと

$$P(1)=1-2-5+6=0$$

ゆえに，$x-1$ は $P(x)$ の因数であり，割り算を行うと

$$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$$

よって，求める解は　-2，　1，　3

練習 5］次の高次方程式を解け。

(1) $x^4-5x^2+4=0$　(2) $x^3-2x+1=0$　(3) $x^4+3x^3-4x^2-3x+3=0$
(4) $x^3-1=0$　(5) $x^3+1=0$　(6) $x^3-3x-2=0$

2.3　連立方程式

一般に，連立 m 元方程式は，方程式の数が m 個ないと解は求められない。$m-1$ 個以下ならば解は無数に存在し，$m+1$ 個以上ならば解けない。

例 17］次の連立 2 元 2 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 2x^2-3xy-2y^2=0 \end{cases}$

解］(1) 第 1 式から　$y=5-2x$　$\cdots\cdots$ ①

これを第 2 式に代入して　$x^2+(5-2x)^2=25$

整理して　$x^2-4x=0$

ゆえに　$x=0,\quad 4$

これを ① に代入して　$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$　$\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) 第 2 式の左辺を因数分解して　$(x-2y)(2x+y)=0$

よって　$x-2y=0$　または　$2x+y=0$

これらと第 1 式とを組み合わせると，次の 2 組の連立方程式が得られる。

$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 & \cdots ① \\ x-2y=0 & \cdots ② \end{cases}$

② から $x=2y$

これを ① に代入して

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$　$\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 & \cdots ① \\ 2x+y=0 & \cdots ③ \end{cases}$

③ から $y=-2x$

これを ① に代入して

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases}$　$\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases}$

よって，x と y の解は上記の 4 解である。

例 18］次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

$$\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+y+2z=-5 \end{cases}$$

解］文字を順次消去して，1 元方程式をつくる。等式を上から ①，②，③ とすると

① + ③	$4y+3z=-6$	$\cdots\cdots$ ④
$2\times$ ① − ②	$z=-2$	$\cdots\cdots$ ⑤
⑤ を ④ に代入	$y=0$	$\cdots\cdots$ ⑥
⑤ と ⑥ を ① に代入	$x=1$	

よって　$x=1$，　$y=0$，　$z=-2$

例 19］連立 2 元 1 次方程式 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=1 \end{cases}$ を解け。

解］2 次方程式の解と係数の関係より，求める x，y は次の t についての 2 次方程式の 2 解である。

$$t^2-4t+1=0 \qquad \text{よって} \quad t=2\pm\sqrt{3}$$

ゆえに　$\begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$　$\begin{cases} x=2-\sqrt{3} \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases}$

練習 6］次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y=x+3 \\ 2y-z=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \\ y+z=9 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} -x+y=2 \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases}$

練習 7］長方形の土地があり，縦を 5 m 減らし，横を 10 m 増やすと，面積はもとの 2 倍になる。また，縦を 10 m 増し，横を 4 m 減らすと，面積はもとの半分になる。この長方形の縦と横の長さを求めよ。

2.4　不等式

不等号 $<$，$>$，$\leqq$，$\geqq$ を用いて表された式を **不等式** という。不等式を考える場合には，実数の範囲では数の大小関係の性質が基本となる。

実数の大小関係

［1］2 つの実数 a，b において，3 つの関係 $a>b$，$a=b$，$a<b$ のうち，どれか 1 つだけが成り立つ

［2］$a>b$，$b>c$　ならば　$a>c$

［3］$a>b$　ならば　$a+c>b+c$，　$a-c>b-c$

［4］$a>b$，$c>0$　ならば　$ac>bc$，　$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

［5］$a>b$，$c<0$　ならば　$ac<bc$，　$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

一般に，実数 a，b に対して，次の性質が成り立つ。

$$a,\ b \text{ が同符号} \iff ab > 0$$

$$a,\ b \text{ が異符号} \iff ab < 0$$

1 次不等式

不等式のすべての項を左辺に移項して，整理したとき

$$ax + b > 0\,, \qquad ax + b \geqq 0$$

$$ax + b < 0\,, \qquad ax + b \leqq 0 \qquad (\text{但し，} a, b \text{ は定数，} a \neq 0)$$

のいずれかの形の不等式を x についての **1 次不等式** という。

1 次不等式 $ax + b > 0$ の解は

$$a > 0 \text{ ならば } x > -\frac{b}{a}\,, \qquad a < 0 \text{ ならば } x < -\frac{b}{a}$$

である。

例 20］次の 1 次不等式を解け。

(1) $6x - 3 < 4x + 5$　　(2) $-6x - 15 \leqq 4x + 5$　　(3) $2 - \dfrac{1}{2}x > \dfrac{x - 12}{3}$

解］(1) $6x - 4x < 5 + 3$

$$2x < 8$$

$$x < 4$$

(2) $-6x - 4x \leqq 5 + 15$

$$-10x \leqq 20$$

$$x \geqq -2$$

(3) 両辺に 6 を掛けて　$12 - 3x > 2x - 24$

移項して　$-3x - 2x > -24 - 12$

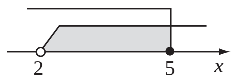
$$-5x > -36 \qquad \text{よって} \quad x < \frac{36}{5}$$

例 21］連立不等式 $\begin{cases} 3x + 1 > 7 \\ 7x - 6 \leqq 4x + 9 \end{cases}$ を解け。

解］不等式を上から ①，② とすると

① より　$3x > 6$　　これは　$x > 2$　$\cdots\cdots$ ③

② より　$3x \leqq 15$　　これは　$x \leqq 5$　$\cdots\cdots$ ④



求める解は ③，④ の共通範囲であるから

$$2 < x \leqq 5$$

☞ **変域を数直線上に図で表す場合，端の数を含むときは ●，含まないときは ○ で表す。**

例 22］1 個 110 円のお菓子を 1 つの箱に詰めて送りたい。お菓子以外に箱代が 120 円，送料が 600 円必要であり，費用は 3,000 円以下にしたい。お菓子を何個詰めることができるか。

解］お菓子を x 個とすると，お菓子代は $110x$ 円であるから

$$110x + 120 + 600 \leqq 3000$$

これは $11x \leqq 2280$ に整理され， $x \leqq 20.72\cdots$ となる。

よって，20 個まで詰めることができる。

練習 8］次の 1 次不等式を解け。

(1) $-3x - 6 < 0$　(2) $x < 8 - 5x$　(3) $x - 5 \geqq 3(x-1) + 3$

(4) $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 3x + 2 < 0 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 4x + 2 > 8x - 10 \\ 2x + 3 \geqq -1 \end{cases}$

絶対値記号を含む不等式

絶対値 $|x|$ は，数直線上で原点から実数 x に対応する点までの距離を表すことより，絶対値記号を含む不等式における x の範囲を考えよう。

［1］ $|x| = a$ （$a > 0$ のとき）を満たす x は，x が正数と負数で考える。

$x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $-x = a$ ，　$x > 0$ のとき $|x| = x$ より $x = a$

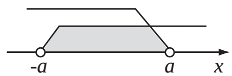
よって　$x = \pm a$

［2］ $|x| < a$ （$a > 0$ のとき）を満たす x の範囲は，x が正数と負数で考える。

$x < 0$ のとき $|x| = -x$ より 不等式は　$-x < a$　$\Rightarrow$　$x > -a$ $\cdots$ ①

$x > 0$ のとき $|x| = x$ より　不等式は $x < a$ $\cdots$ ②

① と ② より　$-a < x < a$ となる。

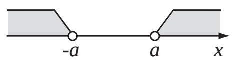


［3］ $|x| > a$ （$a > 0$ のとき）を満たす x の範囲は，x が正数と負数で考える。

$x < 0$ のとき $|x| = -x$ より 不等式は　$-x > a$　$\Rightarrow$　$x < -a$ $\cdots$ ①

$x > 0$ のとき $|x| = x$ より　不等式は $x > a$ $\cdots$ ②

① と ② より　$x < -a$　または　$a < x$ となる。



絶対値と方程式・不等式

［1］$|x| = a$ を満たす x は　　$x = \pm a$　（但し，$a > 0$）

［2］$|x| < a$ を満たす x の範囲は　$-a < x < a$　（但し，$a > 0$）

［3］$|x| > a$ を満たす x の範囲は　$x < -a$　または　$a < x$　（但し，$a > 0$）

例 23］次の 1 次不等式を解け。

(1) $|x - 2| < 3$　(2) $|x - 2| > 3$　(3) $|x + 3| > 4x$

解］(1) $x \geqq 2$ のとき不等式は　$x - 2 < 3$ となり　$x < 5$

条件より $2 \leqq x < 5$ ……①

$x < 2$ のとき不等式は $-(x-2) < 3$ となり　$x > -1$

条件より $-1 < x < 2$ ……②

①と②より　$-1 < x < 5$

(2) $x \geqq 2$ のとき不等式は $x - 2 > 3$ となり　$x > 5$

条件より $x > 5$ ……①

$x < 2$ のとき不等式は $-(x-2) > 3$ となり　$x < -1$

条件より $x < -1$ ……②

①と②より　$x < -1$，　$x > 5$

(3) $x \geqq -3$ のとき不等式は $x + 3 > 4x$ となり　$x < 1$

条件より $-3 \leqq x < 1$ ……①

$x < -3$ のとき不等式は $-(x+3) > 4x$ となり　$x < -\frac{3}{5}$

条件より $x < -3$ ……②

①と②の $-3 \leqq x < 1$ と $x < -3$ をまとめると　$x < 1$

2 次不等式

不等式のすべての項を左辺に移項して，整理したとき

$ax^2 + bx + c > 0$，　$ax^2 + bx + c \geqq 0$

$ax^2 + bx + c < 0$，　$ax^2 + bx + c \leqq 0$　(但し，a, b, c は定数，$a \neq 0$)

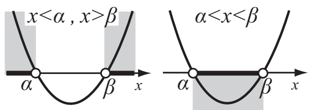
のいずれかの形の不等式を x についての **2 次不等式** という。

2 次不等式を解くには，まず，その 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を求める。そこで，2 次方程式が 2 つの異なる実数解 α，β をもてば

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解されので，$\alpha < \beta$ のとき，$x - \alpha$，$x - \beta$，$(x-\alpha)(x-\beta)$ の符号を調べる。符号は次のように変化する。

x	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$



ゆえに，$a > 0$ のとき

$ax^2 + bx + c > 0$ の解は　$x < \alpha$，　$x > \beta$

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は　$\alpha < x < \beta$