

# STRUCTURAL MECHANICS

## 建築構造力学 | 下 | 初版修正一覽

構造力学研究会

# —初版修正—覧 もくじ—

## 第1章 エネルギー法による構造解析

- p.3 (1-4b)式：式を追記。  
(1-9)式：記号  $\Sigma$  を追加。
- P.4 文中：「構造構造解析」→「構造解析」に修正。

## 第2章 応力法

- p.18 文中：「図 2.6」→「図 2.5」に修正。  
式(2-15a,b,c)：「 $x=0$ 」→「 $x=l$ 」に修正。  
文中：「2.3.1 項の結果と」→「2.3.1 項の例題-1 の結果と」に修正。
- p.25 図 2.11(f)：ローラー支点反力を「5/16」→「5P/16」に修正。
- P.27 図 2.13：高さを「 $h$ 」→「 $h=l$ 」に修正。
- P.32 図 2.24：右側の支点をピンからローラーに修正。反力の矢印の色を濃くした。  
図 2.25：右側の支点をピンからローラーに修正。反力の矢印の色を濃くした。
- P.34 図 2.29：C 点のピンを削除。
- P.40 表 2.7：「 $N=N_0 \cdot N_1 X_1$ 」→「 $N=N_0+N_1 X_1$ 」に修正。  
文中式：「 $-1.932(l/EA)$ 」→「 $-1.932(P l/EA)$ 」に修正。  
表 2.8：「 $-1.932(l/EA)$ 」→「 $-1.932(P l/EA)$ 」に修正。
- P.42 表 2.9：「 $N=N_0 \cdot N_1 X_1$ 」→「 $N=N_0+N_1 X_1$ 」に修正。

## 第3章 変形法（たわみ角法）

- P.44 図 3.2(b)：k 端の  $M_{ki}$  の方向を反時計まわりに修正。
- P.47 図 3.6(a)：「 $V_i=M_{ik}^I+M_{ki}^I/l_{ik}$ 」→「 $V_i=(M_{ik}^I+M_{ki}^I)/l_{ik}$ 」に修正。
- P.51 文中式：「 $\theta_k^{\text{II}}=-\theta_i^{\text{II}}/2$ 」→「 $\theta_k^{\text{II}}=3R_{ik}/2$ 」に修正。  
文中：「(3-14a)」→「(3-16a)」に修正。
- P.54 (3-26b)式：「 $6R_{ik}$ 」→「 $1.5R_{ik}$ 」に修正。
- P.56 文中：「ここで、・・・」の1文に追記および修正。  
(3-31a)式：「 $\Sigma\delta_{xi}=\Sigma\delta_{yi}=\Sigma\theta_{ix}=\Sigma\theta_{iy}$ 」を追記。  
「 $\theta_{ix}$ 」→「 $\theta_{iy}$ 」に修正。「 $\theta_{iy}$ 」→「 $\theta_{ix}$ 」に修正。  
文中：「図 3.13(c)のように」を追記 (P.57 に記載)。
- P.57 図 3.13(c)：部材記号および「独立部材」を追記。

(3-32a)式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 → 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 に修正。

(3-32b)式 : 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 → 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 に修正。

(3-32c)式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 →  
「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 に修正。

文中 : 「独立部材角  $R_{ci}$  との関係が」 を追記。

(3-33a, b)式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 →  
「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 に修正。

文中式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{by}$ 」 → 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 に修正。

解説欄 : (3-32c)式から(3-33a, b)式への誘導を追加。

これに伴い、行列式に関する解説が P.58 へ移動。

P.58 図 3.16 : 高さ  $h$  を追記。

P.59 (3-36a)式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。

(3-36b)式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。

(3-37)式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。

文中式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。

P.71 図 3.31 : B 点近傍の曲げモーメント分布の重なるの表現を修正。

(3-58b)式 : 「 $8\theta_C$ 」 → 「 $8\theta_B$ 」 に修正。

## 第 4 章 マトリックス構造解析法

P.79 図 4.2 : 「 $X_1, \overline{u_1}$ 」 「 $X_2, \overline{u_2}$ 」 → 「 $\overline{X_1^e}, \overline{u_1^e}$ 」 「 $\overline{X_2^e}, \overline{u_2^e}$ 」 に修正。

P.82 図 4.5 : 「変位」 → 「節点力」 に修正。

P.89 (4-24)式 : 境界線を破線に修正し、一部追加。

文中式 : 「 $\{D\}_u$ 」 → 「 $\{P\}_k$ 」 に修正。

P.90 図 4.8 : 「 $\overline{U_2^e}$ 」 → 「 $\overline{u_2^e}$ 」 に修正。

P.92 文中式 : 「 $\overline{\theta_1^2}$ 」 → 「 $\overline{\theta_1^e}$ 」 に修正。

P.97 (4-47 式) : 6 行 6 列目の値を 「0」 → 「1」 に修正。

P.121 図 4.36 : 「モドル」 → 「モデル」 に修正。

## 第 5 章 建築構造設計用の応力計算法

P.135 図 5.12(1) : 図中に固定端を追加。

P.153 文中 : 「(d)」 → 「④」 に修正。

P.158 解説欄 : 図の解像度を修正。

P.162 付表 5.1 : 「 $k$ 」 → 「 $\overline{k}$ 」 に修正

付表 5.2 : 柱脚固定の計算式 (左側) を修正。「 $k$ 」 $\rightarrow$ 「 $\bar{k}$ 」に修正。

## 第 6 章 トラス・ラーメン構造の塑性解析

P.177 図 6.15 : 「式(10)」 $\rightarrow$ 「式(6-12)」に修正。

P.186 文中 : 「 $M_C$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_A$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_C$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_A$ 」に修正。「61/80」 $\rightarrow$ 「17/20」に修正。

「80/61」 $\rightarrow$ 「20/17」に修正。

文中式 : 「 $M_A=38M_P/61+2 \Delta P \ell$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_A=M_P$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_B=42M_P/61- \Delta P \ell$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_B=3M_P/17+ \Delta P \ell$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_C=M_P$  : 一定」 $\rightarrow$ 「 $M_C=23M_P/34+ \Delta P \ell$ 」に修正。

P.187 図 6.35 : 曲げモーメントおよび反力の値を修正。

図 6.36 : 塑性ヒンジ位置を変更。曲げモーメント, 外力および反力の値を修正。

図 6.37 : 曲げモーメント分布および反力の修正。塑性ヒンジ位置を変更。

曲げモーメント, 外力および反力の値を修正。

文中 : 「 $M_A$ 」 「 $M_B$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_B$ 」 「 $M_C$ 」に修正。

文中 : 「 $\Delta P$ 」 $\rightarrow$ 「 $\Delta P_1$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_A=38M_P/61+2 \Delta P_1 \ell$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_B=3M_P/17+ \Delta P \ell$ 」に修正。

文中式 : 「23/122」 $\rightarrow$ 「14/17」に修正。

文中式 : 「 $M_B=42M_P/61- \Delta P \ell$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_A=23M_P/34+ \Delta P_2 \ell$ 」に修正。

文中式 : 「19/61」 $\rightarrow$ 「11/34」に修正。「 $>$ 」 $\rightarrow$ 「 $<$ 」に修正。

P.188 図 6.38 : 曲げモーメント分布および反力の修正。塑性ヒンジ位置を変更。

曲げモーメント, 外力および反力の値を修正。

文中 : 「 $M_A$ 」 $\rightarrow$ 「 $M_C$ 」に修正。

文中式 : 「17/183」 $\rightarrow$ 「31/102」, 「1/4」 $\rightarrow$ 「289/408」に修正。

P.189 図 6.40 : 「81/61」 $\rightarrow$ 「20/17」, 「17/183」 $\rightarrow$ 「31/102」, 「1/4」 $\rightarrow$ 「289/408」に修正。

P.202 図 6.57 : 「4.5m」 $\rightarrow$ 「4m」に修正。

## 追加訂正・建築構造力学(下)正誤表一覧

### 第 5章 建築構造設計用の応力計算法

- P.164 付表 5.5 : 「 $a_1$ 上」 → 「 $a_2$ 上」, 「 $a_1$ 下」 → 「 $a_3$ 下」に修正。  
「 $y_3 : a_2=h$ 上 $\cdots$ 」 → 「 $y_2 : a_2=h$ 上 $\cdots$ 」に修正  
「 $y_3 : a_2=h$ 下 $\cdots$ 」 → 「 $y_3 : a_3=h$ 下 $\cdots$ 」に修正  
「ただし、最上層については $y_2$ 最上層」 → 「ただし最下層については $y_2$ 最下層」に修正  
「 $y_2$  : 下層の層」 → 「 $y_3$  : 下層の層」に修正

### 第 6章 トラス・ラーメン構造の塑性解析

- P.176 図 6.14 : 「 $\varepsilon_y = \Phi_y \cdot y$ 」 → 「 $\varepsilon_y = \Phi \cdot y$ 」に修正。  
P.177 本文上から2行目 : 「4倍程度」 → 「5倍程度」に修正。  
図 6.15 : 式 (10) → 式 (6-12) に修正。  
P.179 図 6.20 : 「 $P_p = P_1 = 3A\delta y$ 」 → 「 $P_p = P_1 + \Delta P_{p10} = 3A\delta y$ 」に修正。  
本文上から4行目 「終局変形」 → 「終局荷重」に修正。  
P.183 図 6.28の図題 : 「変位関係」 → 「変位関係 ( $\delta_2$ )」に修正。  
P.184 本文上から2行目 : 「荷重－変位関係」 → 「荷重－変位関係 ( $\delta_2$ )」に修正。  
P.206 表 6.5  $M_2$  欄の「 $lL/4$ 」 → 「 $l/4$ 」に修正。

以上の追加訂正がございました。お詫び申し上げます。

なお、訂正の詳細につきましては理工図書のホームページにて掲載いたします。

理工図書HP : <https://www.rikohtosho.co.jp/>

### 第 1章 エネルギー法による構造解析

- P.3 (1-4b)式 : 式を追記。  
(1-9)式 : 記号 $\Sigma$  を追加。  
P.4 文中 : 「構造構造解析」 → 「構造解析」に修正。

(1-2) 式および (1-1b) 式は次式となる。

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E \cdot \epsilon \cdot d\epsilon = \frac{E \cdot \epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E} \quad (1-4a)$$

$$U = \int_0^{\epsilon_1} \frac{\sigma_1^2 \cdot A}{2E} \cdot dx = \int_0^{\epsilon_1} \frac{P_1^2}{2E \cdot A} \cdot dx = \frac{P_1^2 \cdot \ell}{2E \cdot A} = \frac{P_1 \delta_1}{2} \quad (1-4b)$$

図 1.1(c) の非線形荷重—変形曲線より、「補足仕事」とよばれる別の仕事  $W^*$  が次式のように定義される。

$$W^* = \int_0^{P_1} \delta \cdot dP \quad (1-5)$$

この仕事は  $P$ - $\delta$  曲線と  $P$  軸で囲まれる面積を表している。ひずみエネルギーの場合と同様に、棒材の補足エネルギー  $U^*$  は  $W^*$  と等しく次式のように書かれる。

$$U^* = W^* = \int_0^{P_1} \delta \cdot dP \quad (1-6)$$

$\sigma$ - $\epsilon$  曲線と  $\sigma$  軸で囲まれる面積に等しい単位体積あたりの補足エネルギー  $u^*$  は次式のように表される。

$$u^* = \int_0^{\epsilon_1} \epsilon \cdot d\sigma \quad (1-7)$$

また、全補足エネルギー  $U^*$  は (1-7) 式を棒材の全体積  $V$  に関して積分することにより求められる。

$$U^* = \int u^* \cdot dV \quad (1-8)$$

以上の考察より、図 1.1(b) の  $\sigma$ - $\epsilon$  関係が線形弾性ならば、ひずみエネルギー  $U$  と補足エネルギー  $U^*$  は等しくなることが分かる。しかし、概念的には両エネルギーは全く異なる点に留意する必要がある。

今、線形弾性構造物に複数の荷重が同時に作用しているものとする。このときのひずみエネルギー  $U$  と補足エネルギー  $U^*$  は等しく次式のように書かれる。

$$U = \sum P_i \cdot \delta_i = U^* = \sum \int \delta \cdot dP = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \delta_i}{2} = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \dots + \frac{P_n \delta_n}{2} \quad (1-9)$$

ここで、 $i$  は荷重番号、 $n$  は全荷重数である。なお、 $P_i$  および  $\delta_i$  は  $i$  番目の荷重と対応する変位である。(1-9) 式の  $U$  と  $U^*$  は荷重  $P$  と変位  $\delta$  の関数である。

\*ここで、荷重  $P_i$  は集中力や偶力を意味し、対応する変位  $\delta_i$  は併進変位および回転角を意味するものとする。

\*1879年に出版された図書でこの理論を導いたイタリアの技術者 A. Castigliano にちなんで名づけられたものである。

### 1.3 ひずみエネルギー法

構造物のひずみエネルギー  $U$  は荷重  $P_i$  がなす仕事に等しい。荷重  $P_i$  は適当な荷重-変位関係より変位  $\delta_i$  の関数として求められ\*、これを(1-1b)式に代入すると  $U$  は変位  $\delta_i$  の関数として表現される。ある変位  $\delta_i$  が微小量  $d\delta_i$  だけ増加するが、ほかの変位成分の増分はゼロのときの、ひずみエネルギー増分  $dU$  は仕事増分  $dW$  と等しく次式により与えられる。

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \cdot d\delta_i = dW = P_i \cdot d\delta_i \quad (1-10)$$

〈解説〉(1-10)式のひずみエネルギー  $U$  は変数である変位  $\delta_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) の関数  $U=f(\delta_1, \dots, \delta_n)$  である。今、考慮している変位領域で  $f$  が偏微分可能であるとき、 $f$  の偏導関数は記号  $\frac{\partial f}{\partial \delta_i}$  で表される。なお、 $\partial$  を「ラウンドディー」とよぶことがある。

さらに、 $U=f$  は全微分可能とすると、全微分  $df$  は次式のように定義される：

$$df = dU = \frac{\partial f}{\partial \delta_1} \cdot d\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial \delta_2} \cdot d\delta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \delta_n} \cdot d\delta_n$$

上式の関係より、次式が導かれる。

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (1-11)$$

この式は  $U$  が変位の関数として表現されるとき、任意の変位  $\delta_i$  に関する  $U$  の偏微分は対応する力  $P_i$  に等しいことを意味しており、「カステリアーノの第1定理<sup>1)</sup>」\*とよばれている。ひずみエネルギー法は、節点変位を未知量として導かれる釣合方程式を解く手法である。よって、この手法は構造解析の「変位法」と等価であり、線形構造物の場合には「剛性法」に相当する。なお、はりや平面骨組の構造解析に有効な変位法の特殊解法である「たわみ角法」が知られている。この手法については第3章で詳しく学習することにする。

重ね合わせの原理を適用できる線形構造物について考えてみる。よって、荷重  $P_i$  は変位  $\delta_i$  の線形結合として次式のように表される。

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11} \cdot \delta_1 + a_{12} \cdot \delta_2 + \dots + a_{1n} \cdot \delta_n \\ P_2 &= a_{21} \cdot \delta_1 + a_{22} \cdot \delta_2 + \dots + a_{2n} \cdot \delta_n \\ &\dots \dots \dots \\ P_n &= a_{n1} \cdot \delta_1 + a_{n2} \cdot \delta_2 + \dots + a_{nn} \cdot \delta_n \end{aligned} \quad (1-12)$$

## 第2章 応力法

- p.18 文中：「図 2.6」 → 「図 2.5」 に修正。  
式(2-15a,b,c)：「 $x=0$ 」 → 「 $x=l$ 」 に修正。  
文中：「2.3.1 項の結果と」 → 「2.3.1 項の例題-1 の結果と」 に修正。
- p.25 図 2.11(f)：ローラー支点反力を「 $5/16$ 」 → 「 $5P/16$ 」 に修正。
- P.27 図 2.13：高さを「 $h$ 」 → 「 $h-l$ 」 に修正。
- P.32 図 2.24：右側の支点をピンからローラーに修正。反力の矢印の色を濃くした。  
図 2.25：右側の支点をピンからローラーに修正。反力の矢印の色を濃くした。
- P.34 図 2.29：C 点のピンを削除。
- P.40 表 2.7：「 $N=N_0 \cdot N_1X_1$ 」 → 「 $N=N_0+N_1X_1$ 」 に修正。  
文中式：「 $-1.932(\theta EA)$ 」 → 「 $-1.932(P\theta EA)$ 」 に修正。  
表 2.8：「 $-1.932(\theta FA)$ 」 → 「 $-1.932(P\theta FA)$ 」 に修正。
- P.42 表 2.9：「 $N=N_0 \cdot N_1X_1$ 」 → 「 $N=N_0+N_1X_1$ 」 に修正。



## 【例題-1】

図2.5(a)の不静定ばりを取り上げ、移動端Aの鉛直反力 $V_A$ を余力 $X$ に選び、図2.5(b)に示した静定基本形を設定する。(2-7)式の2階の微分方程式の右辺 $M$ に(2-10)式で定義した $M$ を代入すると次式のように書かれる。

$$E \cdot I \cdot x = E \cdot I \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = -M = -X \cdot x + \frac{w}{2} \cdot x^2 \quad (2-13)$$

上式を座標 $x$ に関して2回積分する。

・1回目の積分：

$$E \cdot I \cdot \frac{dv}{dx} = E \cdot I \cdot v' = -\frac{X}{2} \cdot x^2 + \frac{w}{6} \cdot x^3 + C_1 \quad (2-14a)$$

・2回目の積分：

$$E \cdot I \cdot v = -\frac{X}{6} \cdot x^3 + \frac{w}{24} \cdot x^4 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2-14b)$$

(2-14)式には余力 $X$ と積分定数 $C_1, C_2$ の3つの未知量が含まれている。これらの未知量を決定するため、次の3つの境界条件を考える。

$$\begin{aligned} v(x=0) &= 0, \\ \frac{dv(x=\ell)}{dx} &= v' = \theta_B = 0, \\ v(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (2-15a, b, c)$$

条件(a)と(2-14b)式より $C_2=0$ となる。条件(b)および(c)をそれぞれ(2-14a)式および(2-14b)式に適用すると次の2式が得られる。

$$E \cdot I \cdot v'(x=\ell) = -\frac{\ell^2}{2} \cdot X + C_1 + \frac{w \cdot \ell^3}{6} = 0 \quad (2-16a)$$

$$E \cdot I \cdot v(x=\ell) = -\frac{\ell^3}{6} \cdot X + \ell \cdot C_1 + \frac{w \cdot \ell^4}{24} = 0 \quad (2-16b)$$

これら2式を連立して解くと $X$ および $C_1$ が求められ、さらに釣合条件より反力 $V_B$ と $M_B$ が決定される。結果は次のようであり2.3.1項の(例題-1)の結果と一致する。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{w \cdot \ell^3}{48}, \quad X = V_A = \frac{3w \cdot \ell}{8}, \\ V_B &= \frac{5w \cdot \ell}{8}, \quad M_B = \frac{w \cdot \ell^2}{8} \end{aligned}$$

次に、4階の微分方程式を利用する例題を示す。予備知識として分布荷重 $w$ 、せん断力 $Q$ 、曲げモーメント $M$ と曲率 $\kappa = d^2 v / dx^2$ 、回転角 $\theta = dv / dx$ 、変形(たわみ) $v$ の間の関係について整理しておく<sup>3)</sup>。まず、 $w, Q, M$ の間の関係は次式のように定義される。

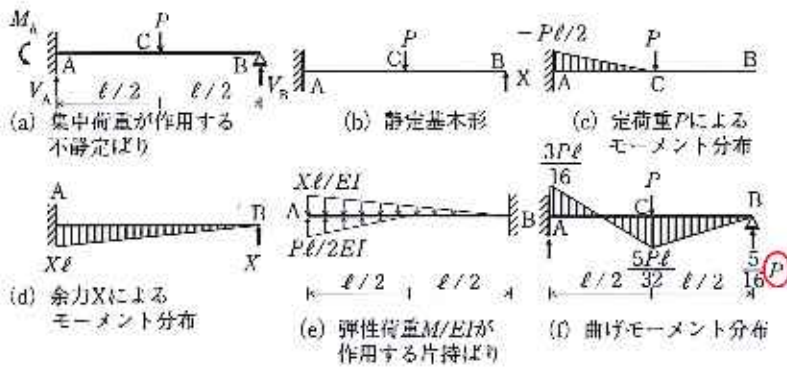


図 2.11 集中荷重が作用する 1 端固定他端移動端の梁の応力解析 (モールの定理)

【例題-1】

図 2.11(a) に示したように、中央に集中荷重  $P$  が作用する 1 端が固定、他端が移動端の不静定ばりの応力解析を行う。このはりには 1 次の不静定であり、移動端 B の反力  $R_B$  を余力  $X$  に選ぶと、静定基本形は図 2.11(b) のように設定される。実荷重  $P$  による静定基本形のモーメント分布は図 2.11(c)、余力  $X$  によるモーメント分布は図 2.11(d) のように与えられる。ここで、次の定理を用いる「片持ばりの任意点  $i$  の回転角およびたわみは、そのはりの自由端と固定端を交換した片持ばりに、弾性荷重  $M/EI$  を逆向きに作用させたときの  $i$  点のせん断力および曲げモーメントに等しい」。弾性荷重  $M/EI$  が作用する片持ばりを図 2.11(e) に示す。上記の定理より、点 B の変位  $\delta_B$  は点 B に関する曲げモーメントを求めることにより次式のように計算される。

$$\delta_B = -\frac{1}{2} \left( \frac{P\ell}{2EI} \right) \cdot \left( \frac{\ell}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{X\ell}{EI} \right) \cdot \ell \cdot \left( \frac{2\ell}{3} \right) = -\frac{5P\ell^3}{48EI} + \frac{X\ell^3}{3EI} \quad (2-34)$$

オリジナルのはりの変位  $\delta_B$  はゼロという適合条件より、余力は  $X = \frac{5P}{16}$  と求められ、曲げモーメント分布は図 2.11(f) のようになる。

【例題-2】

【例題-1】と同じ不静定ばりを取り上げる。ただし、余力  $X$  を固定端 A の反力の曲げモーメント  $M_A$  に選ぶ。すると、静定基本形は図 2.12(a) となる。実荷重  $P$  による静定基本形のモーメント分布は図 2.12(b)、余力  $X$

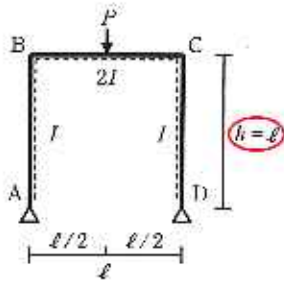


図 2.13 例題構造物

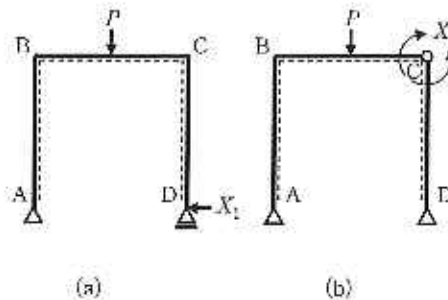


図 2.14 静定基本形と不静定余力

## 〔例題-1〕

図 2.13 に示す 1 次不静定ラーメン構造を例題として、節点系仮想仕事式を応用した計算方法を詳細に説明する。

## (1) 静定基本形の作成

静定基本形としては、図 2.14 に示す 2 つが考えられる。1 つは回転端を移動端に変え、水平方向に不静定余力を加える方法である（図 2.14(a)）。もう 1 つは、3 ピン式ラーメン形式になるようにピンを付加し、不静定余力としてモーメント荷重を加える方法である（図 2.14(b)）。ここでは図 2.14(a) に示した静定基本形を用いて、以降の計算を進めることにする。

(2) 曲げモーメント図 ( $M_0$  図、 $M_1$  図) の描画

静定基本形に、荷重のみ作用したときの曲げモーメント図 ( $M_0$  図) ならびに不静定余力  $X_1=1$  (単位荷重を仮定) のみが作用したときの曲げモーメント図 ( $M_1$  図) を求めると図 2.15 のようになる。

続いて、節点系仮想仕事式を応用した変形計算を行うために、表 2.1 に示す計算表を作成していく。なお、表上部の括弧内の数字は、説明の番号と対応している。

(3) 剛比ならびに基本たわみ角  $\beta = \beta_0/k$  の算出

最初に各部材の基本たわみ角  $\beta$  を算出する。ここでは各部材の基本たわみ角を標準部材の基本たわみ角  $\beta_0$  を用いて表現する。すなわち、次式の通りである。

$$\beta = \frac{\ell}{6EI} = \frac{1}{6E} \cdot \frac{1}{K} = \frac{1}{6E} \cdot \frac{1}{K_0 k} = \beta_0 \cdot \frac{1}{k} \quad (2-36)$$

ここで、 $\ell$ : 部材長さ、 $E$ : ヤング係数、 $I$ : 断面 2 次モーメント、 $K$ : 剛度 ( $= I/\ell$ )、 $k$ : 剛比 ( $= K/K_0$ )、 $K_0$ : 標準剛度である。

なお、 $\beta_0$  は常数 (計算過程において不変) であるため、表中において省略しても構わない。

(9) 曲げモーメント図 ( $M$  図) の描画

$M$  図を描くにあたり、各節点の値は次式によって求めることができる。

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1 \quad (2-40)$$

これを図示すると図 2.23 のようになる。つまり、 $M_0$  図と  $X_1$  倍した  $M_1$  図を重ね合わせることで、最終的な  $M$  図を描画することができる。

【例題-2】

図 2.14(b) に示す 3 ピン式ラーメン形式を静定基本形として、【例題-1】のラーメン構造を解く。このとき  $M_1$  図は図 2.24 に示すとおりである。

不静定余力  $X_1$  を求めるために、計算図表を作成すると表 2.2 のようになる。なお、表 2.1 との違いは表中の  $M_1$  以降の計算のみである。

不静定余力  $X_1$  を計算すると次式のようになる。

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -(-3P\ell\beta_0/8) / 7\beta_0 = 3P\ell h / 56$$

また、図 2.24 に示した  $M_1$  図に不静定余力を乗じると図 2.25 のようになり、図 2.23 (b) と等しいモーメント分布となる。

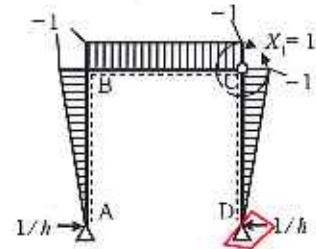


図 2.24  $M_1$  図

表 2.2 計算図表 (例題-2)

	$\beta_0/k$	$M_0$	$C$	$M(\tau_0)$ $M_0 - C$	$\tau_0$	$M_1$	$\tau_1$	$\delta_{10}$ $M_1\tau_0$	$\delta_{11}$ $M_1\tau_1$
A	$\beta_0$					0	$-\beta_0$	0	0
B						-1	$-2\beta_0$	0	$2\beta_0$
B	$\beta_0/2$	0	$-P\ell/8$	$P\ell/8$	$3P\ell\beta_0/16$	-1	$-3\beta_0/2$	$-3P\ell\beta_0/16$	$3\beta_0/2$
C		0	$-P\ell/8$	$P\ell/8$	$3P\ell\beta_0/16$	-1	$-3\beta_0/2$	$-3P\ell\beta_0/16$	$3\beta_0/2$
C	$\beta_0$					-1	$-2\beta_0$	0	$2\beta_0$
D						0	$-\beta_0$	0	$-\beta_0$
$\Sigma$								$-3P\ell\beta_0/8$	$7\beta_0$

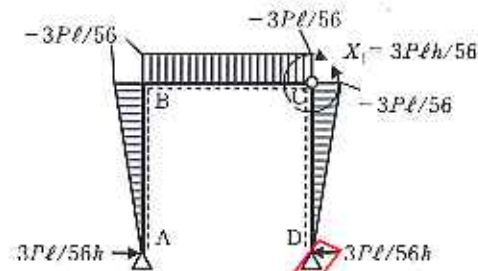


図 2.25  $X_1$  倍した  $M_1$  図

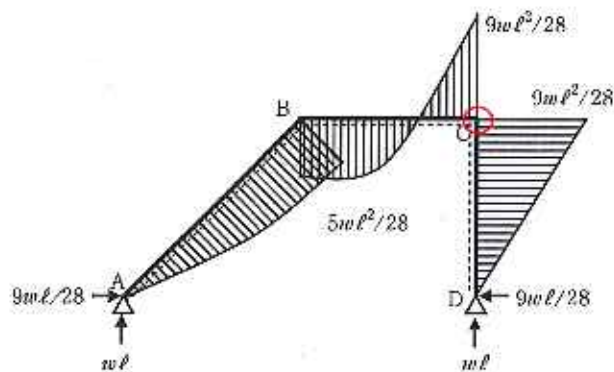


図 2.29 例題-3 のラーメン構造の曲げモーメント分布

【例題-4】

図 2.30 に示す不静定ばりの曲げモーメント分布を求める。この場合、図 2.31 のように静定基本形を仮定できる。例えば、図 2.31 (b) のように静定基本形を仮定した場合、 $M_0$  図ならびに  $M_1$  図は図 2.32 のようになる。また、計算関表は表 2.4 のようになる。

不静定余力  $X_1$  を計算すると次式のようなになる。また、曲げモーメント分布は図 2.33 のようになる。

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -(-w\ell^3\beta_0/2) / (3\ell^2\beta_0/4 - 2w\ell/3)$$

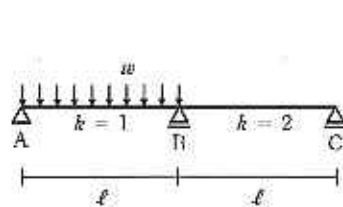


図 2.30 例題-4 の不静定梁

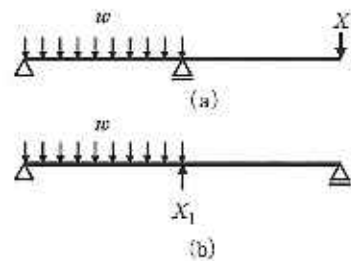
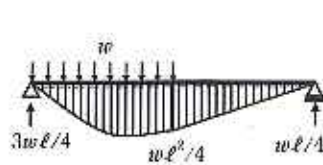
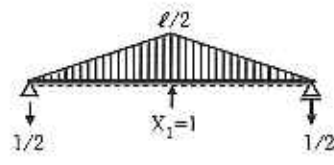


図 2.31 静定基本形



(a)  $M_0$  図



(b)  $M_1$  図

図 2.32 静定基本形の曲げモーメント図

表 2.7 軸方向力の計算

	$N_0$	$N_1 X_1$	$N$ $-N_0 + N_1 X_1$
AH	$-P/\sqrt{3}$	0	$-P/\sqrt{3}$
AC	$P/2\sqrt{3}$	$-P/2\sqrt{3}$	0
BC	$P/\sqrt{3}$	0	$P/\sqrt{3}$
BD	$-P/\sqrt{3}$	0	$-P/\sqrt{3}$
CD	$P/\sqrt{3}$	0	$P/\sqrt{3}$
CE	$P/2\sqrt{3}$	$-P/2\sqrt{3}$	0
DE	$-P/\sqrt{3}$	0	$-P/\sqrt{3}$

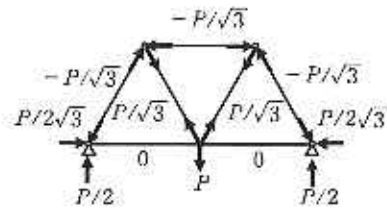


図 2.43 N 図

(例題-2)

次に図 2.44 に示すトラス部材に生じる軸方向力を求める。各部材の断面積  $A$  およびヤング係数  $E$  はすべて同じとする。なお、このトラス構造は、不静定次数が 1 次の内的不静定トラスである。図中に示すように、内的不静定トラスの場合は不静定次数の分だけ部材を切断して静定基本形を作成し、切断箇所の不静定余力を加えるのが解法のポイントである。そして最後に、この切断箇所における変形の連続条件式を考えればよい。計算図表を表 2.8 に示す。

変形の連続条件式： $\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -(-1.932(P\ell/EA)) / 7.456(\ell/EA) = 0.259P$

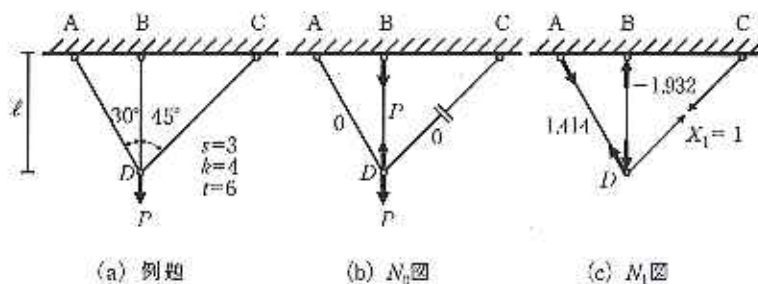


図 2.44 内的不静定トラス

表 2.8 計算図表 (例題-2)

	A	$\ell$	$l/EA$	$N_0$ $\Delta \ell_0$ $= N_0 \cdot \ell / EA$	$N_1$ $\Delta \ell_1$ $= N_1 \cdot \ell / EA$	$\delta_{10}$ $= N_0 \cdot \Delta \ell_0$	$\delta_{11}$ $= N_1 \cdot \Delta \ell_1$
AD	A	$1.155 \cdot \ell$	$1.155(\ell/EA)$	0	0	0	$2309(\ell/EA)$
BD	A	$\ell$	$1(\ell/EA)$	$P$	$-1.932$	$-1.932(P\ell/EA)$	$3733(\ell/EA)$
CD	A	$1.414 \cdot \ell$	$1.414(\ell/EA)$	0	0	0	$1414(\ell/EA)$
						$\Sigma$	$-1.932(P\ell/EA)$

表 2.10 計算図表 (例題-3)

	$A$	$\ell$	$\ell/EA$	$N_0$	$\Delta\ell_0(a/EA)$ $= N_0 \ell/EA$	$N_1$	$\Delta\ell_1(a/EA)$ $= N_1 \ell/EA$	$\delta_{10}(a/EA)$ $= N_1 \Delta\ell_0$	$\delta_{11}(a/EA)$ $= N_1 \Delta\ell_1$
1	$\Delta$	$\sqrt{2} \cdot a$	$\sqrt{2}(a/EA)$	$-2\sqrt{2} \cdot P/3$	$-4P/3$	0	0	0	0
2	$\Delta$	$a$	$1(a/EA)$	$-2P/3$	$-2P/3$	$-2\sqrt{2}/2$	$-2\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2} \cdot P/3$	$1/2$
3	$\Delta$	$\sqrt{2} \cdot a$	$\sqrt{2}(a/EA)$	$-\sqrt{2} \cdot P/3$	$-2P/3$	0	0	0	0
4	$\Delta$	$a$	$1(a/EA)$	$2P/3$	$2P/3$	0	0	0	0
5	$\Delta$	$a$	$1(a/EA)$	$P/3$	$P/3$	$-2\sqrt{2}/2$	$-2\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2} \cdot P/6$	$1/2$
6	$\Delta$	$a$	$1(a/EA)$	$P/3$	$P/3$	0	0	0	0
7	$\Delta$	$a$	$1(a/EA)$	$2P/3$	$2P/3$	$-2\sqrt{2}/2$	$-2\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2} \cdot P/3$	$1/2$
8	$\Delta$	$a$	$1(a/EA)$	0	0	$-2\sqrt{2}/2$	$-2\sqrt{2}/2$	0	$1/2$
9	$\Delta$	$\sqrt{2} \cdot a$	$\sqrt{2}(a/EA)$	$\sqrt{2} \cdot P/3$	$2P/3$	1	$\sqrt{2}$	$2P/3$	$\sqrt{2}$
10	$\Delta$	$\sqrt{2} \cdot a$	$\sqrt{2}(a/EA)$	0	0	1	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
								$\Sigma$	$(4-\sqrt{2})P/6$ $2(1+\sqrt{2})$

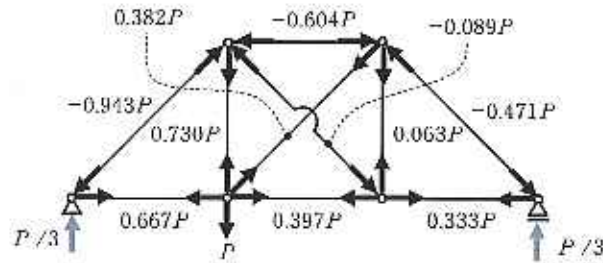


図 2.47 N 図

く部材に番号を付しておく。

変形の連続条件式:  $\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

$$X_1 = -\delta_{10}/\delta_{11} = -((4-2)P/6 \cdot (a/EA)) / (2(1+\sqrt{2}) \cdot (a/EA)) = -(5\sqrt{2}-6)P/12$$

部材に作用する軸方向力は

表 2.9 のように求めることができ、軸方向力 (N) は図 2.47 に示すとおりである。

表 2.9 軸方向力の計算

	$N_0$	$N_1 X_1$	$N$ $= N_0 \oplus N_1 X_1$
1	$-2\sqrt{2} \cdot P/3$	0	$-0.943P$
2	$-2P/3$	$(5-3\sqrt{2})P/12$	$-0.604P$
3	$-\sqrt{2} \cdot P/3$	0	$-0.471P$
4	$2P/3$	0	$0.667P$
5	$P/3$	$(5-3\sqrt{2})P/12$	$0.397P$
6	$P/3$	0	$0.333P$
7	$2P/3$	$(5-3\sqrt{2})P/12$	$0.730P$
8	0	$(5-3\sqrt{2})P/12$	$0.063P$
9	$\sqrt{2} \cdot P/3$	$-(5\sqrt{2}-6)P/12$	$0.382P$
10	0	$-(5\sqrt{2}-6)P/12$	$0.089P$

### 第3章 変形法（たわみ角法）

- P.44 図 3.2(b) :  $k$  端の  $M_{ki}$  の方向を反時計まわりに修正。
- P.47 図 3.6(a) : 「 $V_i = M_{ik}^1 + M_{ki}^1/l_{ik}$ 」 → 「 $V_i = (M_{ik}^1 + M_{ki}^1)/l_{ik}$ 」 に修正。
- P.51 文中式 : 「 $O_k^H = -O_i^H/2$ 」 → 「 $O_k^H = 3R_{ik}/2$ 」 に修正。  
文中 : 「(3-14a)」 → 「(3-16a)」 に修正。
- P.54 (3-26b)式 : 「 $6R_{ik}$ 」 → 「 $1.5R_{ik}$ 」 に修正。
- P.56 文中 : 「ここで、・・・」の1文に追記および修正。  
(3-31a)式 : 「 $\sum \delta_{xi} =$ 」 「 $\sum \delta_{yi} =$ 」 を追記。  
「 $l_{ax}$ 」 → 「 $l_{ay}$ 」 に修正。「 $l_{ay}$ 」 → 「 $l_{ax}$ 」 に修正。  
文中 : 「図 3.13(c)のように」を追記 (P.57 に記載)。
- P.57 図 3.13(c) : 部材記号および「独立部材」を追記。  
(3-32a)式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 → 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 に修正。  
(3-32b)式 : 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 → 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 に修正。  
(3-32c)式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 →  
「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 に修正。  
文中 : 「独立部材角  $R_{ci}$  との関係が」を追記。  
(3-33a, b)式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 →  
「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{ciy}$ 」 「 $l_{cix}$ 」 に修正。  
文中式 : 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 「 $l_{by}$ 」 → 「 $l_{ay}$ 」 「 $l_{ax}$ 」 「 $l_{by}$ 」 「 $l_{bx}$ 」 に修正。  
解説欄 : (3-32c)式から(3-33a, b)式への誘導を追加。  
これに伴い、行列式に関する解説が P.58 へ移動。
- P.58 図 3.16 : 高さ  $h$  を追記。
- P.59 (3-36a)式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。  
(3-36b)式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。  
(3-37)式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。  
文中式 : 「 $R_{FD}$ 」 → 「 $R_{ED}$ 」 に修正。
- P.71 図 3.31 : B 点近傍の曲げモーメント分布の重なるの表現を修正。  
(3-58b)式 : 「 $80c$ 」 → 「 $80B$ 」 に修正。



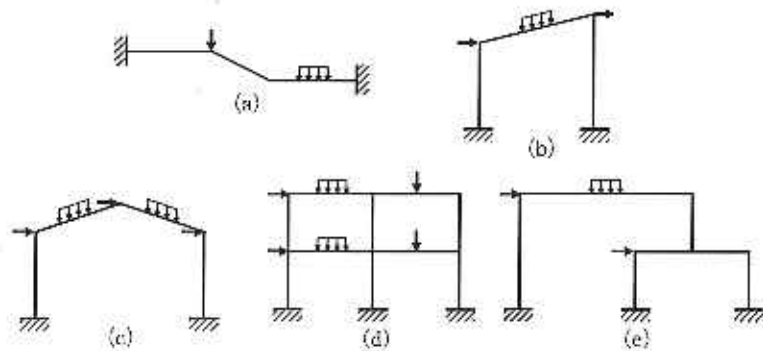


図 3.1 各種の不静定ラーメン構造

- ② 変形としては、曲げモーメントによる変形のみを考慮し、せん断力および軸方向力による変形は無視する。
- ③ すべての部材変形は微小であると見なし、力の釣合は変形前の状態で考える。
- ④ 部材の曲げ剛性  $EI$  は一様である。ここで、 $E$  は材料のヤング係数、 $I$  は部材の断面 2 次モーメントである。

### 3.2.1 材端応力の定義

弾性条件式の誘導を行う前に、材端応力（あるいは断面力）の定義から始めることにする。図 3.2(a) に示したように、任意のラーメン構造から取り出した両端節点を含む  $ik$  部材について考える。この部材に沿う任意の位置で切断した断面には、大きさが等しく、方向が反対の 1 対の断面力（曲げモーメント  $M$ 、せん断力  $Q$  および軸力  $N$ ）が生じているものとする。今、 $ik$  部材の両端部を材軸と直角に切断すると、 $ik$  部材は図 3.2(b) に示す左右の節点側と図 3.2(c) に示す部材側に分離され、左右の切断面には

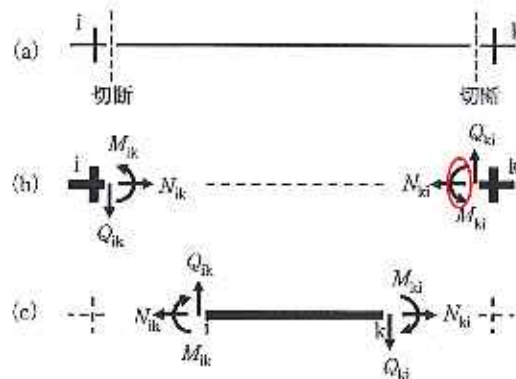


図 3.2  $ik$  部材の節点応力と材端応力

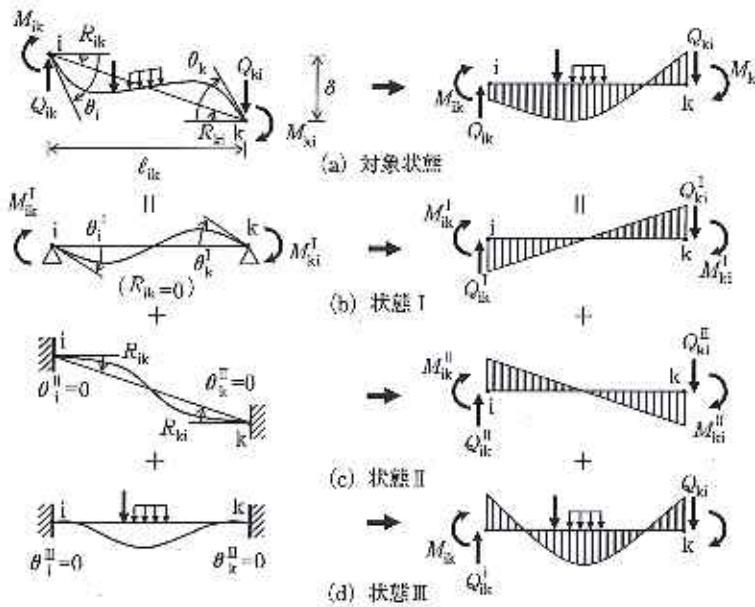


図 3.5 ik 部材の変形状態と対応する応力状態

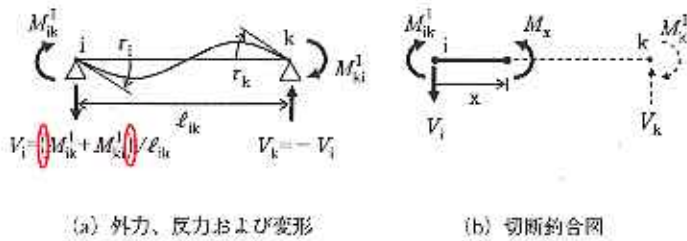


図 3.6 変形状態 I

(1) 状態 I の場合

この状態は、図 3.6 に示したように、単純ばり ik の i 端および k 端にそれぞれ材端モーメント  $M_{ik}^I$  および  $M_{ki}^I$  が作用し、対応する節点角  $\theta_i^I$  および  $\theta_k^I$  が生じる状態と等価である。ここでは、エネルギー法を適用して材端モーメントと節点角の関係を求めてみる。図 3.6 に示したように、i 端から材軸方向に沿って距離  $x$  離れた断面の曲げモーメント  $M_x$  は次式のように書かれる。

$$M_x = M_{ik}^I - \frac{M_{ik}^I + M_{ki}^I}{\ell_{ik}} \cdot x \quad (3-5)$$

この  $M_x$  を第 2 章の (2-9) 式に代入すると、ひずみエネルギー  $U$  は次式のように与えられる。

$$U = \int_0^{\ell_{ik}} \frac{M_x^2}{2EI} \cdot dx = \frac{\ell_{ik}}{6EI} [(M_{ik}^I)^2 - M_{ik}^I \cdot M_{ki}^I + (M_{ki}^I)^2]$$

導くことにする。

### (1) 状態Ⅰの場合

この状態は単純ばり  $ik$  の  $i$  端に材端モーメント  $M_k^I$  が作用し、対応する節点角  $\theta_k^I$  が生じる状態と等価である。変形および応力に関する既知条件は  $R_k^I = 0$ ,  $M_k^I = 0$ ,  $C_k = C_u = 0$  であるから、これらを (3-12) 式に代入すると、材端モーメントは次式となる。

$$M_k^I = 2EK_0 \cdot k_{ik} (2\theta_k^I + \theta_k^I) \quad (3-14a)$$

$$M_k^I = 0 = 2EK_0 \cdot k_{ik} (\theta_k^I + 2\theta_k^I) \quad (3-14b)$$

(3-14b) 式より  $\theta_k^I = -\theta_k^I/2$  であるから、これを (3-14a) 式に代入すると、

$$M_k^I = 3EK_0 \cdot k_{ik} \cdot \theta_k^I \quad (3-15)$$

が導かれる。同様に、材端せん断力は  $D_k = D_u = 0$  であるから次式となる。

$$Q_k^I = -\frac{3EK_0 \cdot k_{ik} \cdot \theta_k^I}{l_{ik}} \quad (3-16)$$

### (2) 状態Ⅱの場合

この場合は節点角  $\theta_k^II$  と部材角  $R_k$  のみが生じている状態である。既知条件  $\theta_k^II = 0$ ,  $M_k^II = 0$ ,  $C_k = C_u = 0$  を (3-12) 式に代入すると、材端モーメントは次式となる。

$$M_k^II = 2EK_0 \cdot k_{ik} (\theta_k^II - 3R_k) \quad (3-16a)$$

$$M_k^II = 0 = 2EK_0 \cdot k_{ik} (2\theta_k^II - 3R_k) \quad (3-16b)$$

(3-16b) 式より  $\theta_k^II = \frac{3}{2}R_k$  であるから、これを (3-16a) 式に代入すると、

$$M_k^II = -3EK_0 \cdot k_{ik} \cdot R_k \quad (3-17)$$

が導かれる。同様に材端せん断力は  $D_k = D_u = 0$  であるから次式となる。

$$Q_k^II = \frac{3EK_0 \cdot k_{ik} \cdot R_k}{l_{ik}} \quad (3-18)$$

### (3) 状態Ⅲの場合

この状態は部材の途中に荷重が作用するとき、変形状態が  $\theta_k^III = R_k = 0$  を維持するように支持した部材、つまり1端固定、他端ピン支持のはり部材  $ik$  に相当する。図 3.8(d) の応力図はこのはりの固定端モーメント  $H_k$  および両固定端せん断力  $V_k$  であり、次のように置き換えることができる。

導かれる。

$$M_k = M_k^I + M_k^R + M_k^M = 2EK_0 \cdot k_k (1.5\theta_i - 1.5R_k) + II_k \quad (3-26a)$$

$$Q_k = Q_k^I + Q_k^R + Q_k^M = -\frac{2EK_0 \cdot k_k}{l_k} (1.5\theta_i - 1.5R_k) + V_k \quad (3-26b)$$

なお、(3-26) 式において  $\theta^I = \theta^M = 0$  であるから  $\theta^I = \theta_i$  と置いている。これが他端ピン部材に対する弾性条件式である。

### 3.4 ラーメンの変形に関する条件

たわみ角法では節点角  $\theta$  と部材角  $R$  を未知の変形量として選び、材端応力  $M$ 、 $Q$  を  $\theta$ 、 $R$  の関数として定式化を行っている。ラーメン内のある節点の節点角は他の節点角や部材角とは独立に生じ、剛節の条件が成立すると仮定する。一方、部材角相互の関係は無関係ではなく、幾何学的条件により相互に関係づけられる。本節では、節点角に関する剛節条件および部材角相互の幾何学的条件について解説する。

#### 3.4.1 剛節の条件

例として図 3.1(d) に示したラーメン構造内のはり柱の一部よりなる十字型部分架構の変形状態について考える。図 3.10 は対象とする部分架構の  $i$  節点まわりの変形前・後の形状を示している。図 3.10(b) に示すたわみ角を用いると、 $i$  節点に関する剛節条件は次式のように書かれる。

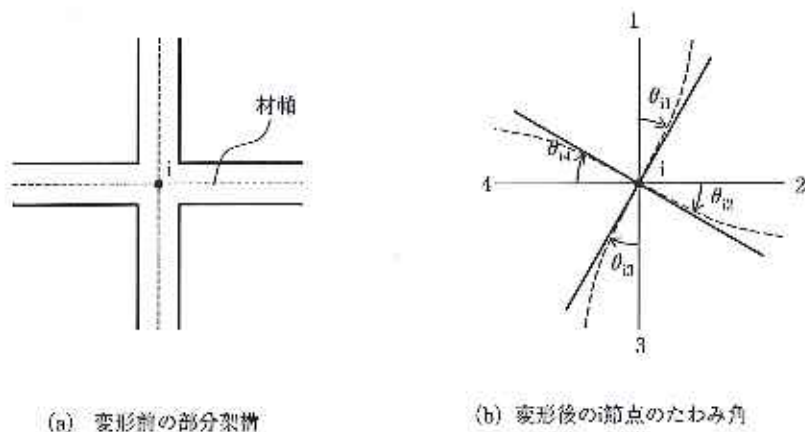


図 3.10 部分架構の変形条件

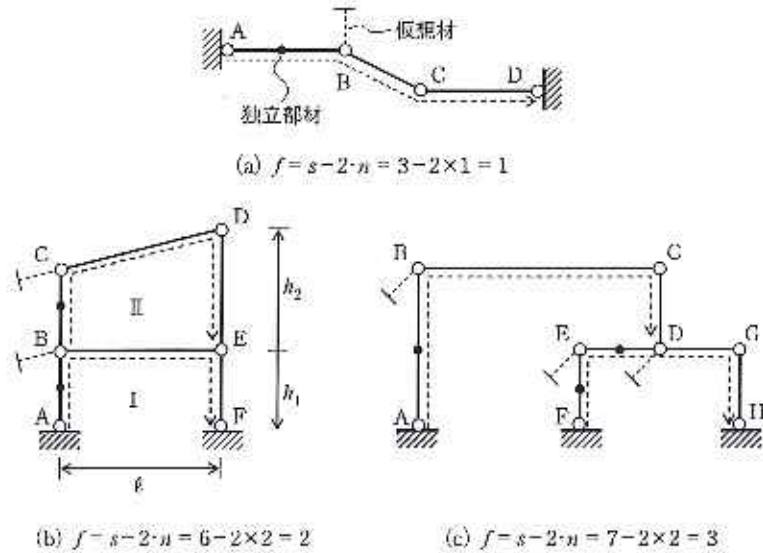


図 3.12 独立部材角の選定例

関する例が示してある。(a) のケースでは、 $f=1$  であるから独立部材角は 1 個で AB 材の  $R_{AB}$  を選んでいる。(b) のケースでは、 $f=2$  であるから  $R_{AB}$  と  $R_{BC}$  の 2 つを独立部材角に選んでいる。(c) のケースでは、 $f=3$  であるから  $R_{AB}$ 、 $R_{FE}$ 、 $R_{ED}$  の 3 つを独立部材角に選んでいる。これらのケースでは 2 本の従属部材はいずれもお互いに平行でない。

次に独立部材角の選び方、および部材角相互の関係について考えてみる<sup>2)</sup>。図 3.13(a) の多角形は、 $n$  本の部材により囲まれた 1 つの閉鎖形ラーメンを表すものとする。節点 1 と 2 を結ぶ a 部材の端 1 を固定し、a 部材に部材角  $R_a$  を与えると、図 3.13(b) から分かるように、端 2 の  $x$ 、 $y$  方向の変位成分  $\delta_{x2}$ 、 $\delta_{y2}$  は次式のように表される。

$$\delta_{x2} = R_a \cdot l_a \cdot \sin \theta_a ; \quad \delta_{y2} = -R_a \cdot l_a \cdot \cos \theta_a \quad (3-29a, b)$$

12 部材と  $n-1$  部材の 1 端を切断し、上記と同様にすべての部材に部材角を与えると、 $n-1$  部材の 1 端の変位成分  $\delta_{x1}$ 、 $\delta_{y1}$  は次式となる。

$$\delta_{x1} = \sum R_i \cdot l_i \cdot \sin \theta_i ; \quad \delta_{y1} = -\sum R_i \cdot l_i \cdot \cos \theta_i \quad (3-30a, b)$$

ここで、 $R_i$ 、 $l_i$ 、 $\theta_i$  は任意部材  $i$  の部材角、長さ、角度である。 $l_{iy} = l_i \sin \theta_i$ 、 $l_{ix} = \ominus l_i \cos \theta_i$  とおくと、閉鎖形ラーメンの節点 1 はすでに結合されているので、変位成分は次式のようにゼロとなる。

$$\sum \delta_{xi} \rightarrow \sum l_{iy} R_i = 0 ; \quad \sum \delta_{yi} \rightarrow \sum l_{ix} R_i = 0 \quad (3-31a, b)$$

上式の 2 式を閉鎖形の適合条件式という。3.4.2 項で述べたように「1 つの閉鎖形には必ず 2 個の拘束条件が存在する」とはこの条件を意味する。

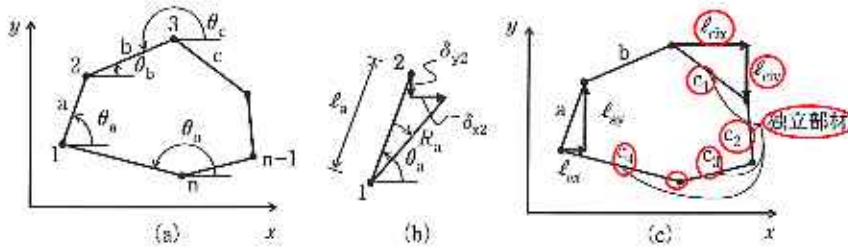


図 3.13 n本の部材よりなる多角形閉鎖系ラーメン

今、図 3.13(c) のように 2 本の部材 a と b を従属部材として、残りの部材を独立部材とし  $C_i$  と表記すれば、(3-31) 式は次式のようになる。

$$l_{ay} \cdot R_a + l_{by} \cdot R_b = -\sum l_{ciy} \cdot R_{ci} \quad (3-32a)$$

$$l_{ax} \cdot R_a + l_{bx} \cdot R_b = -\sum l_{cix} \cdot R_{ci} \quad (3-32b)$$

上式はマトリックス形式で次式のように書かれる。

$$\begin{bmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix} = -\sum R_{ci} \begin{Bmatrix} l_{ciy} \\ l_{cix} \end{Bmatrix} \quad (3-32c)$$

(3-32) 式を  $R_a$ 、 $R_b$  に関して解くと、次式のように独立部材角  $R_{ci}$  との関係が与えられる。

$$R_a = -\sum \frac{\begin{vmatrix} l_{ix} & l_{ciy} \\ l_{iy} & l_{cix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix}} \cdot R_{ci} ; R_b = -\sum \frac{\begin{vmatrix} l_{iy} & l_{ciy} \\ l_{ix} & l_{cix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix}} \cdot R_{ci} \quad (3-33a, b)$$

ここで、分母の  $||$  は行列式\*を意味する。 $R_a$ 、 $R_b$  を求めるため、分母に関して次の条件が課せられる。

$$\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix} \neq 0$$

行列式がゼロとならないことの幾何学的意味は、「従属部材 a と b が互いに平行であってはならない」ということである。

以下では、簡単な例題骨組に閉鎖形の適合条件式を利用して部材角相互関係を計算する手続きを示すことにする。

【例題 3.1】

図 3.14 に示したラーメン構造の部材角相互の関係を求めてみる。

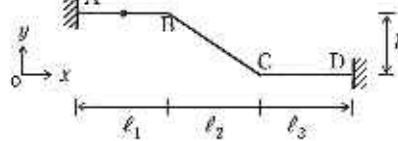


図 3.14 例題 3-1

(3-32c) 式から (3-33a, b) 式の誘導は次のようである：

今、(3-32c) 式を  $[A][X] = (B)$  と略記し、この式の両辺に前方より逆行行列  $[A]^{-1}$  を乗じると、  
 $[A]^{-1}[A][X] = [A]^{-1}(B)$   
 $(X) = [A]^{-1}(B)$

ここで、 $[I]$  は単位行列。上式は次のように書き直すことができる：

$$\begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix} = -\sum \begin{bmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} l_{ciy} \\ l_{cix} \end{Bmatrix} R_{ci}$$

ここで、 $[A]^{-1}$  は  $[A]$  の逆行行列であり次式となる：

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} l_{bx} & -l_{by} \\ -l_{ax} & l_{ay} \end{bmatrix}$$

以上より、

$$\begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix} = -\sum \frac{1}{\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix}} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} l_{ix} & -l_{by} \\ -l_{ax} & l_{ay} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{ciy} \\ l_{cix} \end{Bmatrix} R_{ci}$$

$$= -\sum \frac{1}{\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix}} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} l_{ix} \cdot l_{ciy} - l_{by} \cdot l_{cix} \\ -l_{ax} \cdot l_{ciy} + l_{ay} \cdot l_{cix} \end{Bmatrix} R_{ci}$$

$$= -\sum \frac{1}{\begin{vmatrix} l_{ay} & l_{by} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} l_{ix} & l_{ciy} \\ l_{iy} & l_{cix} \\ l_{ax} & l_{bx} \end{bmatrix} R_{ci}$$

最終的に、上式より (3-33a, b) 式が得られる。

\*マトリックス  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$   
 の行列式は  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}$  となる。

図 3.12(a) の解説で述べたように、独立部材は 1 本であり、残りの 2 本の部材は従属部材となる。従属部材は互いに平行であってはならないので、部材 AB と CD を従属部材に選ぶことができない。ここでは、部材 AB を独立部材角  $R_{AB}$ 、部材 BC と CD を従属部材角  $R_{BC}$ 、 $R_{CD}$  に選ぶ。(3-31) 式の閉鎖形適合条件式を適用すると次のようになる。

$$\ell_1 \cdot R_{AB} + \ell_2 \cdot R_{BC} + \ell_3 \cdot R_{CD} = 0 ; 0 \cdot R_{AB} + (-h) \cdot R_{BC} + 0 \cdot R_{CD} = 0 \quad (3-34a, b)$$

上式を解くと次のようになる。

$$R_{BC} = 0, \quad R_{CD} = -(\ell_3/\ell_2) \cdot R_{AB}$$

なお、 $\ell_1 = \ell_2$  の場合には、 $R_{CD} = -R_{AB}$  となる。

[例題 3.2]

図 3.15 に示したラーメン構造の部材角相互の関係を求めてみる。図 3.11 の解説で述べたように、独立部材は 1 本であり、ここでは部材 AB を独立部材角  $R_{AB}$ 、部材 BC と CD を従属部材角  $R_{BC}$ 、 $R_{CD}$  に選ぶ。(3-31) 式の閉鎖形適合条件式を適用すると次のようになる。

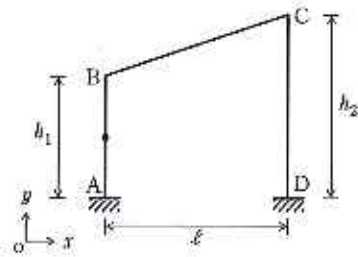


図 3.15 例題 3-2

$$0 \cdot R_{AB} + l \cdot R_{BC} + 0 \cdot R_{CD} = 0 ; h_1 \cdot R_{AB} + (h_2 - h_1) \cdot R_{BC} - h_2 \cdot R_{CD} = 0 \quad (3-35a, b)$$

上式を解くと次のようになる。

$$R_{BC} = 0, \quad R_{CD} = (h_1/h_2) \cdot R_{AB}$$

なお、 $h_1 = h_2$  の場合には、 $R_{CD} = R_{AB}$  となる。このことより次のことがいえる。「2 本の部材あるいは柱が平行なとき、それを結合する部材あるいははりの部材角はゼロとなる。」

[例題 3.3]

最後に、図 3.16 に示したラーメン構造の閉鎖系Ⅱの部材角相互の関係を求めてみる。

図 3.12(c) の解説で述べたよう

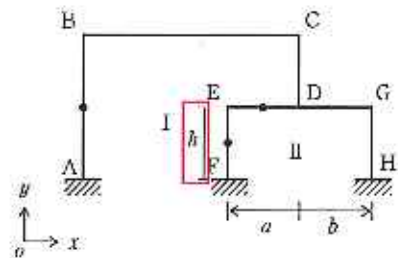


図 3.16 例題 3-3

に、独立部材は2本であり、ここでは部材 FE と ED を独立部材角  $R_{FE}$ 、 $R_{ED}$ 、部材 DG と GH を従属部材角  $R_{DG}$ 、 $R_{GH}$  に選ぶ。(3-31) 式の閉鎖形適合条件式を適用すると次のようになる。

$$0 \cdot R_{FE} + a \cdot R_{ED} + b \cdot R_{DG} + 0 \cdot R_{GH} = 0 \quad (3-36a)$$

$$h \cdot R_{FE} + 0 \cdot R_{ED} + 0 \cdot R_{DG} - h \cdot R_{GH} = 0 \quad (3-36b)$$

これを (3-32) 式のようにマトリクス形式で表すと次式となる。

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{DG} \\ R_{GH} \end{Bmatrix} = -R_{FE} \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix} - R_{ED} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-37)$$

(3-33) 式を上式に適用して、部材角  $R_{DG}$ 、 $R_{GH}$  に関して解くと次のようになる。

$$R_{DG} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h & -h \end{vmatrix} \cdot R_{FE} - \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -h \end{vmatrix} \cdot R_{ED} = -\frac{a}{b} R_{ED}$$

$$R_{GH} = - \begin{vmatrix} b & b \\ 0 & h \end{vmatrix} \cdot R_{FE} - \begin{vmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot R_{ED} = R_{FE}$$

### 3.5 力の釣合条件式

3.3 節で述べたように、たわみ角法はラーメン構造物の応力解析を行うため、未知量として節点角  $\theta$  と部材角  $R$  を選び、材端断面応力 ( $M$ 、 $Q$ ) を  $\theta$  と  $R$  の関数として基本式の定式化を行った。そのため、任意のラーメン構造物を解析するために含まれる未知量の全数は、未知の節点角数と独立部材角数の合計となる。よって、これらすべての未知量を決定するためには、未知量の合計数に等しい数の力の釣合方程式が必要になる。そこで問題となるのは、これらの節点角と独立部材角を求める条件を確立することである。この条件としては節点角  $\theta$  に関連する力の釣合条件と、部材角  $R$  に関連する力の釣合条件に分類される。前者に対して構築される釣合式を「節点方程式」、後者に対する釣合式を「せん力方程式」という。

#### 3.5.1 節点方程式

図 3.17(a) に示したように、外力が作用して変形した後に釣合状態にあ



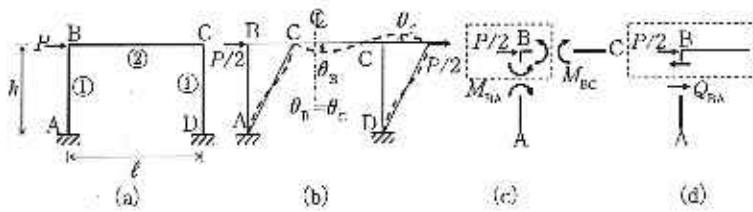


図 3.30 例題 3-8 のラーメン構造

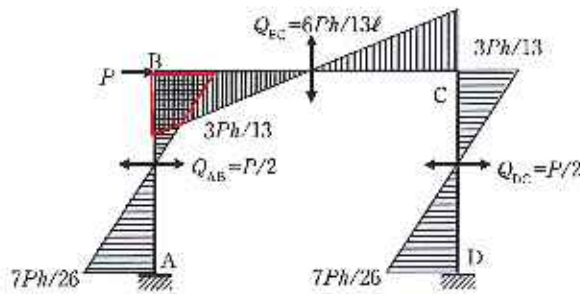


図 3.31 例題 3-8 の曲げモーメント分布図

$$-M_{BA} - M_{BC} = 0$$

あるいは

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (3-58a)$$

この節点方程式に (3-57a) 式を代入すると次式が導かれる。

$$8\theta_B - 3R_1 = 0 \quad (3-58b)$$

次に、図 3.30(d) に示す外力とせん断力の釣合より、次式のせん力方程式が得られる。

$$P/2 - Q_{BA} = 0 \quad (3-59a)$$

このせん力方程式に (3-57b) 式を代入すると、次式が導かれる。

$$\theta_B - 2R_1 = -\frac{P \cdot h}{6} \left( \frac{1}{2EK_0} \right) \quad (3-59b)$$

(3-58b) 式と (3-59b) 式を連立して解くと、 $\theta_B$  および  $R_1$  は次のように求められる。

$$\theta_B = \frac{Ph}{26} \left( \frac{1}{2EK_0} \right), \quad R_1 = \frac{4Ph}{39} \left( \frac{1}{2EK_0} \right) \quad (3-59)$$

この  $\theta_B$  および  $R_1$  値を (3-59) 式に代入し、また逆対称条件を考慮すると、すべての材端モーメントおよびせん断力は次のように求められる。

$$M_{AB} = M_{DC} = -\frac{7Ph}{26}, \quad M_{BA} = M_{CD} = -\frac{3Ph}{13}, \quad M_{BC} = M_{CB} = \frac{3Ph}{13}$$

$$Q_{BA} = Q_{AB} = Q_{CD} = Q_{DC} = \frac{P}{2}, \quad Q_{BC} = Q_{CB} = -\frac{6P}{13} \left( \frac{h}{l} \right)$$

## 第4章 マトリックス構造解析法

- P.79 図 4.2 : 「 $X_1, \bar{u}_1$ 」 「 $X_2, \bar{u}_2$ 」 → 「 $X_1^e, \bar{u}_1^e$ 」 「 $X_2^e, \bar{u}_2^e$ 」 に修正。
- P.82 図 4.5 : 「変位」 → 「節点力」 に修正。
- P.89 (4-24)式 : 境界線を破線に修正し、一部追加。  
文中式 : 「 $\{D\}_n$ 」 → 「 $\{P\}_k$ 」 に修正。
- P.90 図 4.8 : 「 $\bar{u}_2^e$ 」 → 「 $u_2^e$ 」 に修正。
- P.92 文中式 : 「 $\bar{\theta}_1^e$ 」 → 「 $\theta_1^e$ 」 に修正。
- P.97 (4-47 式) : 6 行 6 列目の値を 「0」 → 「1」 に修正。
- P.121 図 4.36 : 「モドル」 → 「モデル」 に修正。

### 4.3 トラス構造の解析

#### 4.3.1 トラス要素の剛性マトリックス

図4.2に示した $\bar{x}-\bar{y}$ 局所座標系で定義したトラス要素の剛性マトリックスを誘導する。要素長さは $\ell$ 、ヤング係数 $E$ および断面積 $A$ は一様とする。要素端の1および2は節点であり、 $\bar{x}$ 軸は節点1を原点とする要素軸の方向である。今、節点1および2に作用する節点力をそれぞれ $\bar{X}_1^e$ および $\bar{X}_2^e$ とし、対応する節点変位を $\bar{u}_1^e$ および $\bar{u}_2^e$ とする。各記号の右肩添え字は要素に関する量を意味する。なお、節点変位を「自由度」という。求めたい方程式は、節点力ベクトル $[\bar{X}^e]$ と節点変位ベクトル $[\bar{u}^e]$ を関係づける次式の要素剛性方程式である。

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1^e \\ \bar{X}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^e & \bar{k}_{12}^e \\ \bar{k}_{21}^e & \bar{k}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad [\bar{X}^e] = [\bar{k}^e][\bar{u}^e] \quad (4-1)$$

上式の $[\bar{k}^e]$ は局所座標系における要素剛性マトリックスとよばれている。この要素剛性マトリックス $[\bar{k}^e]$ を求める方法はいくつか可能であるが、ここでは第1章の1.2項で述べたひずみエネルギー法の概念を適用した(1-15)式を利用して誘導することにする。

要素 $\ell$ の単位体積あたりのひずみエネルギー $u$ は、要素のひずみを $\varepsilon$ とすると、次式のように書かれる。

$$u = \int E \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{E \cdot \varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2} \cdot \left( \frac{\bar{u}_2^e - \bar{u}_1^e}{\ell} \right)^2 \quad (4-2)$$

この $u$ にトラス要素の体積 $A\ell$ を乗じると、全ひずみエネルギー $U$ が次式のように求められる。

$$U = \frac{EA}{2\ell} (\bar{u}_2^e - \bar{u}_1^e)^2 \quad (4-3)$$

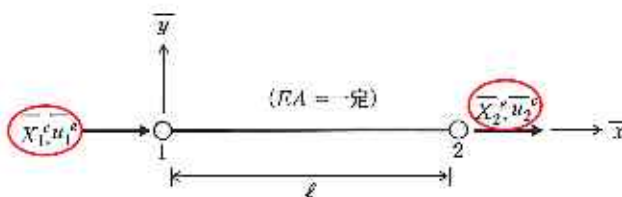


図4.2 局所座標系のトラス部材

剛性係数  $\bar{k}_n^e$  は、 $U$  を変位成分  $\bar{u}_1^e$  および  $\bar{u}_2^e$  に関して偏微分することにより次のように求められる。

$$\begin{aligned}\bar{k}_{11}^e &= \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{u}_1^2} = \frac{EA}{\ell}, & \bar{k}_{12}^e &= \bar{k}_{21}^e = \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} = -\frac{EA}{\ell}, \\ \bar{k}_{22}^e &= \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{u}_2^2} = \frac{EA}{\ell}\end{aligned}\quad (4-4)$$

これを (4-1) 式の剛性方程式に代入し、整理すると次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1^e \\ \bar{X}_2^e \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad [\bar{X}^e] = [\bar{k}^e] \{\bar{u}^e\} \quad (4-5a)$$

ただし、

$$[\bar{k}^e] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-5b)$$

### 4.3.2 変位と力の変換マトリックス

前項では、局所座標系で定義される要素の剛性方程式の誘導を行った。本項では、これらの剛性方程式を構造物の全要素に共通な  $x-y$  基準座標軸系に変換する方法について解説する。例えば、図 4.3 に示したように、局所  $\bar{x}$  軸が基準  $x$  軸に対して反時計回り方向に角度  $\theta$  をなす要素 12 について考える。

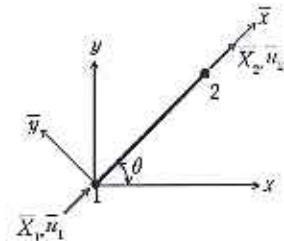


図 4.3 傾斜したトラス要素と座標系

#### (i) 変位の変換マトリックス

図 4.4 は要素の 1 端をピン支持し、他端の節点に基準  $x$  軸方向の変位  $U$  あるいは基準  $y$  軸方向の変位  $V$  を与えた状態を示す。図 4.4(a) と (b) を合成すると、局所座標系で定義される節点 1 の変位  $\bar{u}_1^e$  は次式のように与えられる。

$$\bar{u}_1^e = U_1^e \cos \theta + V_1^e \sin \theta \quad (4-6a)$$

同様に図 4.4(c) と (d) より、節点 2 の変位  $\bar{u}_2^e$  は次式のように与えられる。

$$\bar{u}_2^e = U_2^e \cos \theta + V_2^e \sin \theta \quad (4-6b)$$

今、 $c = \cos \theta$ 、 $s = \sin \theta$  と置くと、(4-6a, b) 式は、次のマトリックス式で表される。

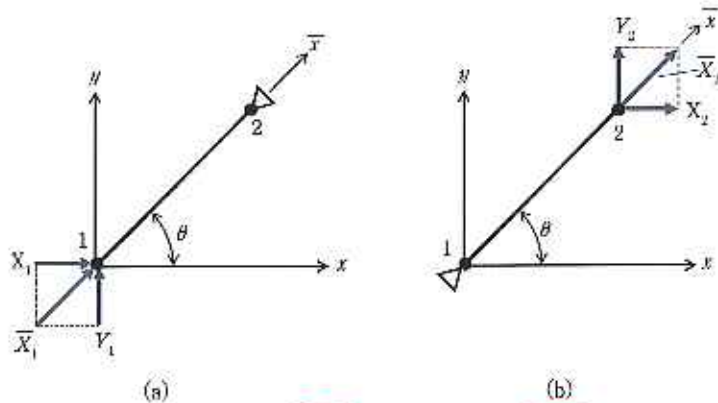


図 4.5 基準座標系の節点力と局所座標系の節点力の関係

$$X_2^e = \bar{X}_2^e \cdot \cos \theta = \bar{X}_2^e \cdot c \quad ; \quad Y_2^e = \bar{X}_2^e \cdot \sin \theta = \bar{X}_2^e \cdot s \quad (4-8b)$$

(4-8a, b) 式をマトリックス式で表すと次のようである。

$$\begin{Bmatrix} X_1^e \\ Y_1^e \\ X_2^e \\ Y_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1^e \\ \bar{X}_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{X^e\} = [T]^T \cdot \{\bar{X}^e\} \quad (4-9a)$$

ただし、

$$[T]^T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (4-9b)$$

ここで、 $[T]^T$  は「力の変換マトリックス」であり、変位の変換マトリックス  $[T]$  の転置\*であることが分かる。

### 4.3.3 部材の全体剛性マトリックス

前項までの結果を用いて、要素の基準座標系に関する剛性方程式の誘導を行う。(4-5a) 式に (4-7a) 式を代入すると次式が得られる。

$$\{\bar{X}^e\} = [\bar{k}^e][T]\{U^e\} \quad (4-10)$$

さらに、(4-10) 式を (4-9a) 式に代入すると次の結果が得られる。

$$\{X^e\} = [T]^T [\bar{k}^e][T]\{U^e\} = [k^e]\{U^e\} \quad (4-11a)$$

ただし、

$$[k^e] = [T]^T [\bar{k}^e][T] \quad (4-11b)$$

ここで、マトリックス  $[k^e]$  は要素の基準座標系に関する「全体剛性マト

\*転置(マトリックス)マトリックス(行列)の行と列を交換して得られるマトリックスのことである。例えば、(4-9b)式は(4-7b)式の転置マトリックスである。

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_b \\ \{P\}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 = 0 \\ P_2 = -F \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}; \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} \{D\}_u \\ \{D\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 = U_1 \\ D_2 = V_1 \\ D_3 = U_2 = 0 \\ D_4 = V_2 = 0 \\ D_5 = U_3 = 0 \\ D_6 = V_3 = 0 \end{Bmatrix} \quad (4-24)$$

以上より、構造剛性方程式は次式のように書かれる。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.477 & 0.192 & -0.144 & -0.192 & -0.333 & 0 \\ 0.192 & 0.256 & -0.192 & -0.256 & 0 & 0 \\ -0.144 & -0.192 & 0.144 & 0.192 & 0 & 0 \\ -0.192 & -0.256 & 0.192 & 0.256 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-25)$$

#### (5) 変位、反力、要素節点力の計算

(4-25) 式を展開すると次式が得られる。

$$\{P\}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} = [K_{11}] \{D\}_b = EA \begin{bmatrix} 0.477 & 0.192 \\ 0.192 & 0.256 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (4-26a)$$

$$\{P\}_u = \begin{Bmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = [K_{21}] \{D\}_u = EA \begin{bmatrix} -0.144 & -0.192 \\ -0.192 & -0.256 \\ -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (4-26b)$$

(4-26a) 式を解くと、未知変位は次のように求められる。

$$\{D\}_b = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = [K_{11}]^{-1} \{P\}_b = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 3.012 & -2.259 \\ -2.259 & 5.612 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix}$$

あるいは、

$$D_1 = \frac{2.259F}{EA}; \quad D_2 = -\frac{5.612F}{EA}$$

これらの変位を (4-26b) 式に代入すると、未知の反力は次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} -0.144 & -0.192 \\ -0.192 & -0.256 \\ -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{F}{EA} \begin{Bmatrix} 2.259 \\ -5.612 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 1.00 \\ -0.75 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$P_3 = 0.75F, \quad P_4 = F, \quad P_5 = -0.75F, \quad P_6 = 0$$

次に各要素の節点力は (4-10) 式より以下のように求められる。

・要素1に対して:  $c=0.6, s=0.8, \ell=5\text{m}, A_1=2A$  を用いると

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1^e \\ \bar{Y}_1^e \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2.259F}{EA} \\ -\frac{5.612F}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.25F \\ 1.25F \end{Bmatrix}$$

・要素2に対して:  $c=1.0, s=0, \ell=3\text{m}, A_2=A$  を用いると、

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_2^e \\ \bar{Y}_2^e \end{Bmatrix} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2.259F}{EA} \\ -\frac{5.612F}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.75F \\ -0.75F \end{Bmatrix}$$

これより、要素1と2の軸力は  $\bar{X}_2^e$  および  $\bar{X}_3^e$  と表わされることから、それぞれ  $+1.25F$  および  $-0.75F$  と求まる (引張力が正)。

#### 4.4 ラーメン (骨組) 構造の解析

##### 4.4.1 骨組要素の剛性マトリックス

図4.8に示した  $\bar{x}-\bar{y}$  局所座標系で定義した骨組要素の剛性マトリックスを誘導する。要素長さは  $\ell$  であり、断面積  $A$ 、ヤング係数  $E$  および断面2次モーメント  $I$  は一様とする。要素端の1および2は節点であり、 $\bar{x}$  軸は節点1を原点とした要素軸の方向である。骨組要素の節点自由度(変位)は  $\bar{x}$  軸方向と  $\bar{y}$  軸方向の併進変位  $\bar{u}^e$  と  $\bar{v}^e$  および回転変位  $\bar{\theta}^e$  の3個である。各節点にはこれらの変位成分に対応する3個の節点力  $\bar{X}^e, \bar{Y}^e, \bar{M}^e$

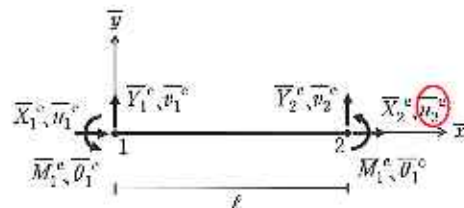


図4.8 局所座標系の骨組要素

に沿う曲げモーメント分布が一定あるいは直線変化することを認めるものである。つまり、 $\mu_1$ を座標  $x$  に関して微分すると (4-30b) 式の勾配曲線  $\mu_2 (= \theta)$  が得られる。さらに、 $\mu_2$  を座標  $\bar{x}$  に関して微分すると次式の曲率  $\mu_3 (= \kappa)$  が導かれる：

$$\mu_3 = \frac{d\mu_2}{dx} = \frac{d^2\mu_1}{dx^2} = \kappa = 2C_3 + 6C_4 \cdot \bar{x}$$

上式より部材軸に沿う曲率分布は  $\bar{x}$  の1次関数であり直線変化することが分かる (係数  $C_4$  がゼロならば一定であってもよい)。  $\kappa = M/EI$  であるから、曲げモーメント  $M$  は曲率  $\kappa$  に比例する。結局、3次のたわみ曲線を仮定することは、直線変化する曲げモーメント分布を表現することを意図している。

と、たわみ曲線の勾配  $\mu_2$  は次式となる。

$$\mu_2 = \frac{d\mu_1}{dx} = \theta = C_2 + 2C_3 \cdot \bar{x} + 3C_4 \cdot \bar{x}^2 \quad (4-30b)$$

(4-30a, b) 式をマトリックス式で表現すると次のようである。

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 \\ 0 & 1 & 2\bar{x} & 3\bar{x}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (4-30c)$$

境界条件より、 $\bar{x} = 0$  のとき、 $\mu_1 = C_1 = \bar{v}_1^e$ 、 $\mu_2 = C_2 = \bar{\theta}_1^e$

$$\bar{x} = \ell \text{ のとき、} \mu_1 = C_1 + C_2 \ell + C_3 \ell^2 + C_4 \ell^3 = \bar{v}_2^e$$

$$\mu_2 = C_2 + 2C_3 \ell + 3C_4 \ell^2 = \bar{\theta}_2^e$$

これらの関係を (4-30c) 式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_1^e \\ \bar{\theta}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{\theta}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (4-31)$$

上式の未定係数ベクトル  $\{C\}$  は次式のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1^e \\ \bar{\theta}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{\theta}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1^e \\ \bar{\theta}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{\theta}_2^e \end{Bmatrix} \quad (4-32)$$

(4-32) 式を (4-30c) 式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 \\ 0 & 1 & 2\bar{x} & 3\bar{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1^e \\ \bar{\theta}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{\theta}_2^e \end{Bmatrix} \quad (4-33)$$

(4-33) 式を展開して  $\mu_2$  を導き、その  $\mu_2$  をさらに  $\bar{x}$  で微分すると、曲率  $\kappa$  および曲げモーメント  $M$  の分布は次式のように導かれる。

$$\kappa = \frac{M}{EI} = \frac{d\mu_2}{dx} = \frac{d^2\mu_1}{dx^2} = A + B \cdot \bar{x} \quad (4-34a)$$

$$M = EI(A + B \cdot \bar{x}) \quad (4-34b)$$



あるいは、

$$\{\bar{u}^e\} = [T]\{U^e\} \quad (4-45b)$$

次に、図 4.11 は要素の 1 端における基準座標系に関する節点力と、局所座標系に関する節点力の関係を示している。図 4.11 (a), (b), (c) より次式が成立する。

$$\begin{aligned} X_1^e &= \bar{X}_1^e \cos \theta - \bar{Y}_1^e \sin \theta, \\ Y_1^e &= \bar{X}_1^e \sin \theta + \bar{Y}_1^e \cos \theta, \quad M_1^e = \bar{M}_1^e \end{aligned} \quad (4-46a)$$

同様に、要素の 2 端における節点力の関係は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} X_2^e &= \bar{X}_2^e \cos \theta - \bar{Y}_2^e \sin \theta, \\ Y_2^e &= \bar{X}_2^e \sin \theta + \bar{Y}_2^e \cos \theta, \quad M_2^e = \bar{M}_2^e \end{aligned} \quad (4-46b)$$

今、 $c = \cos \theta$ 、 $s = \sin \theta$  と置くと、(4-46a, b) 式は、次のマトリックス式で表される。

$$\begin{Bmatrix} X_1^e \\ Y_1^e \\ M_1^e \\ X_2^e \\ Y_2^e \\ M_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1^e \\ \bar{Y}_1^e \\ \bar{M}_1^e \\ \bar{X}_2^e \\ \bar{Y}_2^e \\ \bar{M}_2^e \end{Bmatrix} \quad (4-47a)$$

あるいは、

$$\{X^e\} = [T]^T \{\bar{X}^e\} \quad (4-47b)$$

#### 4.4.3 要素の全体剛性マトリックス

前項までの結果を用いて、要素の基準座標系に関する剛性方程式の誘導を行う。(4-27) 式に (4-45b) 式を代入すると次式が得られる。

$$\{\bar{X}^e\} = [\bar{k}^e][T]\{U^e\} \quad (4-48)$$

さらに、(4-48) 式を (4-47b) 式に代入すると次の結果が得られる。

$$\{X^e\} = [T]^T [\bar{k}^e][T]\{U^e\} = [k^e]\{U^e\} \quad (4-49a)$$

ただし、

$$[k^e] = [T]^T [\bar{k}^e][T] \quad (4-49b)$$

ここで、マトリックス  $[k^e]$  は要素の基準座標系に関する「全体剛性マトリックス」である。 $[k^e]$  は  $6 \times 6$  のマトリックスとなり、(4-49b) 式のマトリックス 3 重積を評価することにより表 4.1 のように求められる。

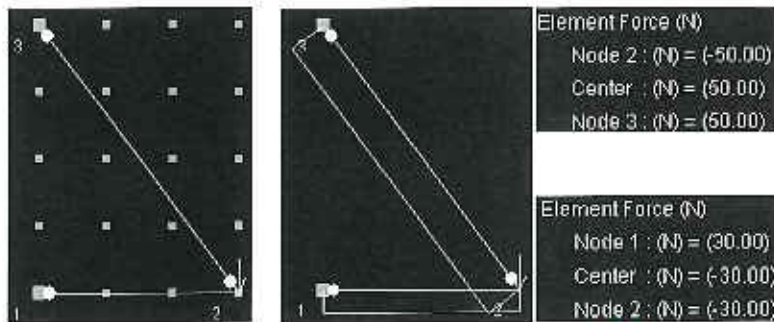


図 4.36 骨組解析プログラムにおけるトラス構造のモデル化の例

転に対する不安定を防いでいる。また、もう一方の 23 部材に関しては、両端ともピン接合にしている。計算結果を併せて示すが、正しい解が得られていることを確認できるだろう。

#### 4.5.9 トラス構造と大スパン

トラス構造は、各部材がピン接合していると考え、荷重は部材節点に作用するため、部材中には軸方向力しか作用しないと考えることができる。したがって、曲げモーメントによる変形が生じにくい構造となり、構造物全体として変形が生じにくい特徴がある。このような理由から、身近なところでは橋梁や屋根、屋根の小屋組など、大スパンを必要とする部位に利用されるケースが多い。そこで、実際にトラス構造が変形しにくい構造であることを計算によって確認したいと思う。

図 4.37 に検討対象とするトラス構造を示す。ここでは、平行弦トラスを取り上げることにする。部材断面は 50mm×50mm とし、材料は鋼材とする。図 4.38 に計算結果を示す。参考のため、図 4.39 に同一断面形状を有する 6m の角鋼\*を単純支持した場合の計算結果も示す。

計算結果を見ると、トラス構造の場合、最大変形量が 9mm である。一方、単純支持した角鋼の場合、現実的には起こりえないが、最大変形量は約 15m となった。そこで、トラス構造と同等の変形量になるための角鋼の断面形状を考えてみる。まず、仮想仕事式を用いて単純支持した角鋼の中央部の変形量を求める。ここでは、荷重の状態を等分布荷重と考えて、次式を用いることにする。

$$\delta = \frac{5}{2} M \cdot \bar{M} \cdot \beta = \frac{5}{2} \cdot 450 \cdot 1.5 \cdot \frac{6}{6 \cdot 2.1 \times 10^8 \cdot I} = \frac{8.036 \times 10^{-8}}{I}$$

トラス構造物の変形が 9mm であるから、 $\delta = 0.009\text{m}$  として角鋼の断面

\*角鋼  
断面形状が正方形の棒鋼のことである。

## 第5章 建築構造設計用の応力計算法

P.135 図 5.12(1) : 図中に固定端を追加。

P.153 文中 : 「(d)」 → 「④」 に修正。

P.158 解説欄 : 図の解像度を修正。

P.162 付表 5.1 : 「 $k$ 」 → 「 $\bar{k}$ 」 に修正

付表 5.2 : 柱脚固定の計算式 (左側) を修正。「 $k$ 」 → 「 $\bar{k}$ 」 に修正。

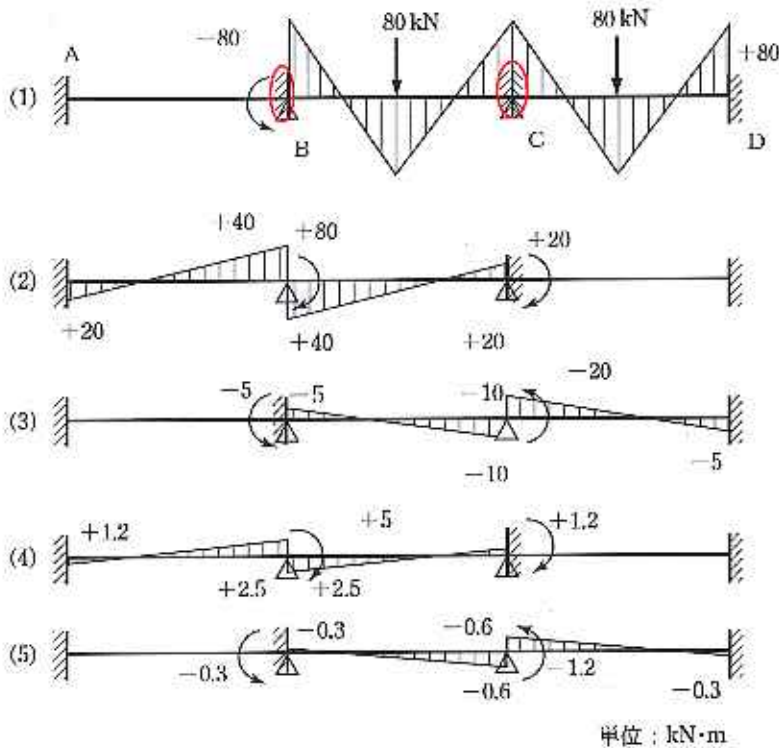


図 5.12 図上計算の説明

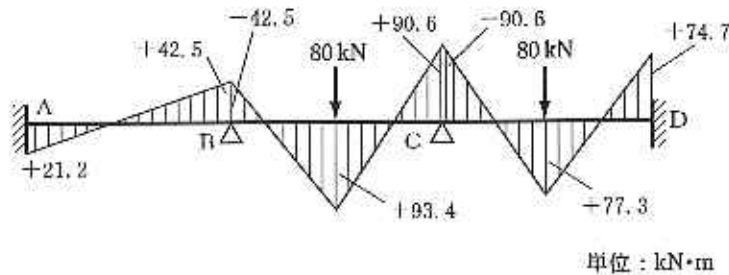


図 5.13 曲げモーメント図

④ そこでまた、C点を固定しておいて、B点の固定モーメント  $-5 \text{ kN}\cdot\text{m}$  を逆に加えて解除すると図(4) のようになり、C点に固定モーメント  $+1.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$  が必要となる。

⑤ このようにして、何回か繰り返して解除しているうちに、曲げモーメント図は収束する。

⑥ 一応収束したところで、初めからの曲げモーメント図(1)、(2)、(3)、(4)、(5) …を全部合成すると、図 5.13 のように曲げモーメント図が得られる\*。

これが求めるラーメンの曲げモーメント図である。

\*図 5.12 の (1) ~ (5) を合成するとき、(5) の BC 部材の B 端の到達

表 5.8  $P_{30}$  による曲げモーメント ( $M_p$ )

	水平力 $P$ が作用する 前例題の値 (例に照らし)	$P$ の代わりに $P_{30}$ の 値を代入した値	$M_p$
A	$-\frac{4}{14}Ph=$	$0.286 \frac{1.194C}{h} h$	$= -0.340C$
B	$-\frac{3}{14}Ph=$	$-0.214 \frac{1.194C}{h} h$	$= -0.256C$
B	$+\frac{3}{14}Ph=$	$+0.214 \frac{1.194C}{h} h$	$= +0.256C$
C	$+\frac{3}{14}Ph=$	$+0.214 \frac{1.194C}{h} h$	$= +0.256C$
C	$-\frac{3}{14}Ph=$	$-0.214 \frac{1.194C}{h} h$	$= -0.256C$
D	$-\frac{4}{14}Ph=$	$-0.286 \frac{1.194C}{h} h$	$= -0.340C$

④ 曲げモーメント図の合成  $M_0 + M_p = M$

表 5.9 曲げモーメントの合成

	$M_0$	$M_p$	$M$
A	$+0.864C$	$-0.340C$	$+0.524C$
B	$+1.727C$	$-0.256C$	$+1.471C$
B	$-1.727C$	$+0.256C$	$-1.471C$
C	$+0.931C$	$+0.256C$	$+1.187C$
C	$-0.931C$	$-0.256C$	$-1.187C$
D	$-0.466C$	$-0.340C$	$-0.806C$

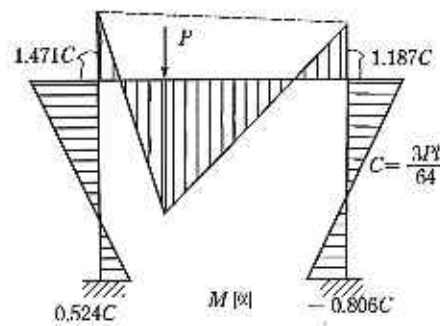


図 5.39 曲げモーメント図



$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{k_c}$$

固定支持の場合

$$a = \frac{0.5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}} \quad (5-28)$$

ピン支持の場合

$$a = \frac{0.5\bar{k}}{1 + 2\bar{k}}$$

(2) 各柱のせん断力  $Q_i$  を求める。

$$Q_i = (\text{層の総せん断力} : \Sigma Q) \times \frac{D}{\Sigma D} \quad (5-29)$$

$\Sigma D$  : 層の全柱および耐震壁のせん断力分布係数の総和

(3) 柱の反曲点高  $yh^*$  を求める。  $y$  は柱の反曲点高比で  $h$  は柱の高さを表す。  $y$  は次式で与えられる。

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \quad (5-30)$$

ここに、  $y_0$  : 標準反曲点高比で層数および層の位置で決まる (付表 5.3)。

$y_1$  : 上下のはりの剛比変化による修正値で、上下のはりの剛性比にあまり大きな差がない場合は  $y_1 \approx 0$  になる (付表 5.4)。

$y_2$  : 上層の層高変化による修正値で  $\bar{k}$  と  $h_1/h$  によって決まる。

$h_1$  は上層の層高を表す。層高の差があまりない場合は  $y_2 \approx 0$  になる (付表 5.5)。

$y_3$  : 下層の層変化による修正値で最下層では考慮しない (付表 5.5)。

(4) 各柱の曲げモーメントを、各柱のせん断力  $Q$  と反曲点高  $yh$  によって求める (図 5.44(a))。

(5) 各節点における釣合いの関係からはりの曲げモーメントを求める。さらにはりのせん断力、柱の軸方向力を求めて計算を終了する (図 5.44 (b))。

(6) 耐震壁がある

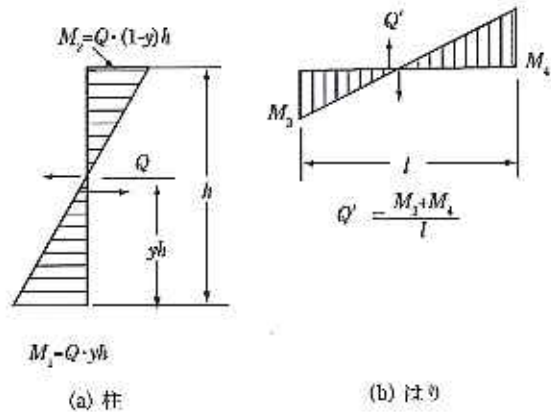
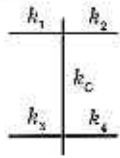
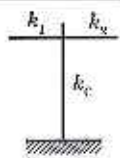
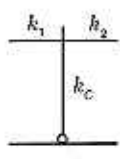
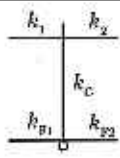


図 5.44 柱とはりの曲げモーメント

付表 5.1 (1)  $\bar{k}$  および  $a$  の公式表

条 件	記 号	$h$ および $a$
一般層		$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{2k_c}$ $a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}}$
固 定		$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{k_c}$ $a = \frac{0.5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}}$
最 下 階 ピ ン		$h = \frac{k_1 + k_2}{k_c}$ $a = \frac{0.5h}{1 + 2h}$
半固定 (つなぎばり)		$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_{01} + k_{02}}{2k_c}$ $a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}}$

付表 5.2 (1)  $a$  の実用表

$\bar{k}$	一般層	柱脚固定	柱脚ピン	$\bar{k}$	一般層	柱脚固定	柱脚ピン
	$a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}}$	$a = \frac{0.5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}}$	$a = \frac{0.5\bar{k}}{1 + 2\bar{k}}$		$a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}}$	$a = \frac{0.5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}}$	$a = \frac{0.5\bar{k}}{1 + 2\bar{k}}$
0.1	0.048	0.29	0.042	1.6	0.44	0.58	0.19
0.2	0.091	0.32	0.071	1.8	0.47	0.61	0.20
0.3	0.13	0.35	0.094	2.0	0.50	0.63	0.20
0.4	0.17	0.38	0.11	3.0	0.60	0.70	0.21
0.5	0.20	0.40	0.13	4.0	0.67	0.75	0.22
0.6	0.23	0.42	0.14	5.0	0.71	0.79	0.23
0.7	0.26	0.44	0.15	10.0	0.83	0.88	0.24
0.8	0.29	0.46	0.15	20.0	0.91	0.93	0.24
0.9	0.31	0.48	0.16	30.0	0.94	0.95	0.25
1.0	0.33	0.50	0.17	40.0	0.95	0.96	0.25
1.2	0.37	0.53	0.18	$\infty$	1.00	1.00	0.25
1.4	0.41	0.56	0.18				

## 第6章 トラス・ラーメン構造の塑性解析

P.177 図 6.15 : 「式(10)」 → 「式(6-12)」に修正。

P.186 文中 : 「 $M_C$ 」 → 「 $M_A$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_C$ 」 → 「 $M_A$ 」に修正。「61/80」 → 「17/20」に修正。  
「80/61」 → 「20/17」に修正。

文中式 : 「 $M_A=38M_P/61+2\Delta P\ell$ 」 → 「 $M_A=M_P$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_B=42M_P/61-\Delta P\ell$ 」 → 「 $M_B=3M_P/17+\Delta P\ell$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_C=M_P$  : 一定」 → 「 $M_C=23M_P/34+\Delta P\ell$ 」に修正。

P.187 図 6.35 : 曲げモーメントおよび反力の値を修正。

図 6.36 : 塑性ヒンジ位置を変更。曲げモーメント、外力および反力の値を修正。

図 6.37 : 曲げモーメント分布および反力の修正。塑性ヒンジ位置を変更。

曲げモーメント、外力および反力の値を修正。

文中 : 「 $M_A$ 」「 $M_B$ 」 → 「 $M_B$ 」「 $M_C$ 」に修正。

文中 : 「 $\Delta P$ 」 → 「 $\Delta P_1$ 」に修正。

文中式 : 「 $M_A=38M_P/61+2\Delta P_1\ell$ 」 → 「 $M_B=3M_P/17+\Delta P\ell$ 」に修正。

文中式 : 「23/122」 → 「14/17」に修正。

文中式 : 「 $M_B=42M_P/61-\Delta P\ell$ 」 → 「 $M_A=23M_P/34+\Delta P_2\ell$ 」に修正。

文中式 : 「19/61」 → 「11/34」に修正。「>」 → 「<」に修正。

P.188 図 6.38 : 曲げモーメント分布および反力の修正。塑性ヒンジ位置を変更。

曲げモーメント、外力および反力の値を修正。

文中 : 「 $M_A$ 」 → 「 $M_C$ 」に修正。

文中式 : 「17/183」 → 「31/102」, 「1/4」 → 「289/408」に修正。

P.189 図 6.40 : 「81/61」 → 「20/17」, 「17/183」 → 「31/102」, 「1/4」 → 「289/408」に修正。

P.202 図 6.57 : 「4.5m」 → 「4m」に修正。



鋼では降伏モーメントに対応する降伏曲率  $\phi_y$  の4倍程度で  $0.99M_p \approx M_p$  となるので、図6.8の応力-ひずみ関係における完全弾塑性仮定と同様に、図6.15中の実線で示した「完全弾塑性  $M-\phi$  関係」モデルを設定することが多い。

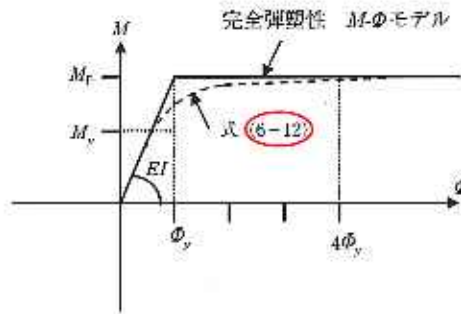


図 6.15 曲げモーメント—曲率関係

図6.15、縦軸の  $M_y/M_x$  は、 $M_y/M_x = Z_y \phi_y / Z_x \phi_x = Z_y / Z_x$  となって断面の性質だけで決まる数値なので、これを形状係数とよぶ。矩形断面では1.5、H形鋼ではよく1.14が使われる。使用頻度の高いH形鋼や角形鋼管、円形鋼管などについてはそれぞれの曲げ軸に対する弾性断面係数、塑性断面係数の値が設計用の数表として準備されている。

## 6.4 構造の弾塑性

### 6.4.1 トラスの弾塑性

図6.16のトラスを考えよう。これは最も単純な1次不静定トラスである。荷重  $P$  が漸増する時の部材断面力の推移と、荷重  $P$  作用点の  $P$  方向変位を追跡する。 $P$  が小さなうちは弾性体として応答するから (Step 1)、弾性解が利用できる (図6.17)。

構造の弾性限界は、トラス部材のどれかが降伏軸力\*に達する時点であ

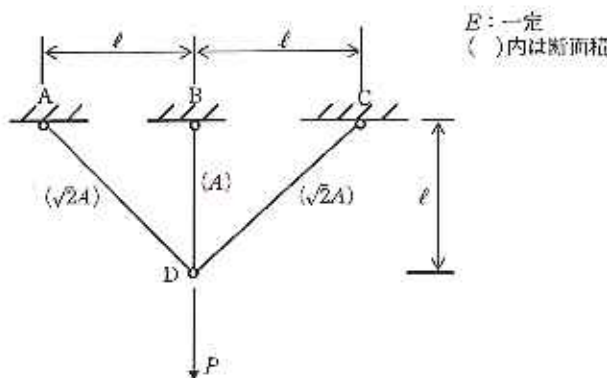
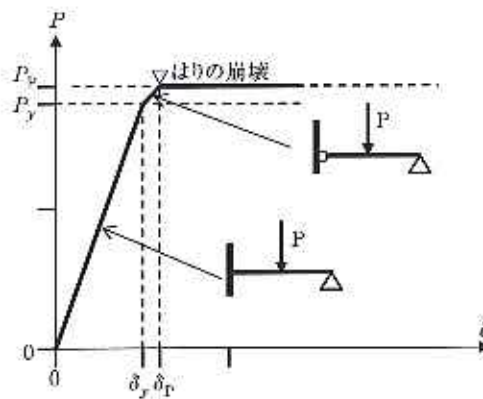


図 6.16 荷重  $P$  を受ける1次不静定トラス

\*降伏軸力 = 全塑性軸力  
完全弾塑性体からなる部材断面中心に軸力  $N$  だけを加える。力  $N$  を増せば断面内に均等に分布する応力  $\sigma$  も増える。そして断面内の応力  $\sigma$  が降伏点  $\sigma_y$  に到達した時、これに釣合う断面力  $N$  を全塑性軸力 ( $N_0$  または  $N_p$ )、または降伏軸力 ( $N_y$ ) という。



$$P_y = \frac{16}{3} \left( \frac{M_p}{\ell} \right)$$

$$P_r = 6 \left( \frac{M_p}{\ell} \right)$$

$$\delta_y = \frac{7}{144} \left( \frac{M_p \ell^2}{EI} \right)$$

$$\delta_r = \frac{1}{16} \left( \frac{M_p \ell^2}{EI} \right)$$

図 6.33 はりの荷重—変位関係

以上のデータを用いて不  
 静定ばりの荷重—変位関係  
 を図 6.33 に示す。

次に 図 6.34 に示すラー  
 メン構造の弾塑性挙動を考  
 えよう。断面の全塑性モー  
 メント  $M_p$  を共通とする部  
 材で構成されている。  $EI$

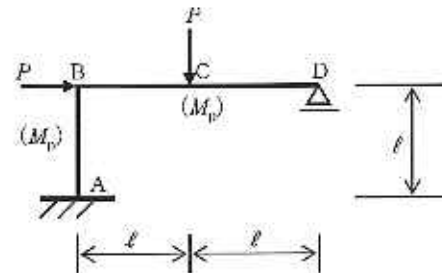


図 6.34 1次不静定ラーメン

は一定、荷重は2箇所に作用し、両荷重とも漸増するものとする。これは  
 1次不静定ラーメンだから応力法で簡単に弾性解が得られる(図 6.35)。  
 荷重の弾性限界  $P_y$  は、弾性解の最大曲げモーメント  $M_A$  を全塑性モー  
 メント  $M_p$  に等値することによって得られる(図 6.36)。

$$M_A = \frac{17}{20} P \ell = M_p \quad \therefore P_y = \frac{20}{17} \left( \frac{M_p}{\ell} \right)$$

ラーメンの弾塑性挙動は、これまでの計算例と同様に、荷重を  
 $P = P_y + \Delta P$  とおいて、「弾塑性の釣合=弾性限界の釣合+増分荷重の釣合」  
 と考えれば、それぞれの釣合は弾性計算で求められる。図 6.36 の弾性限  
 界釣合曲げモーメント分布と図 6.37 に示す増分荷重に対する釣合曲げ  
 モーメント分布を重ね合わせると、

$$M_A = M_p$$

$$M_B = \frac{3}{17} M_p + \Delta P \ell$$

$$M_C = \frac{23}{34} M_p + \Delta P \ell \text{ が得られる。}$$

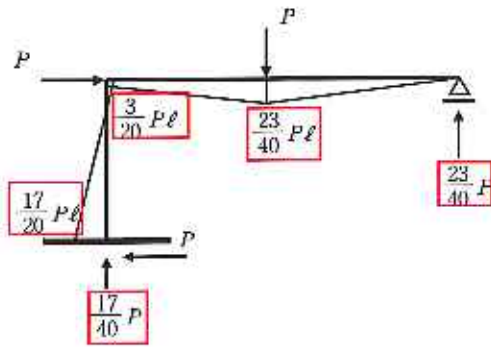


図 6.35 弾性解

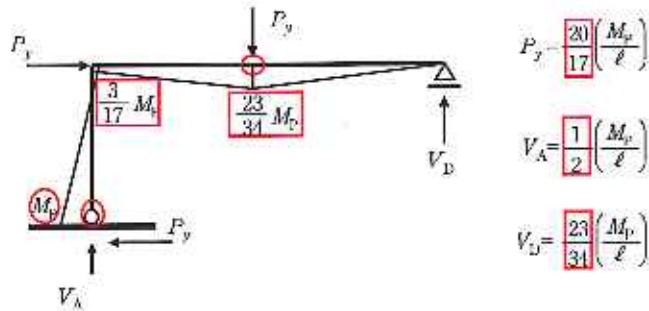


図 6.36 弾性限界の釣合曲げモーメント分布

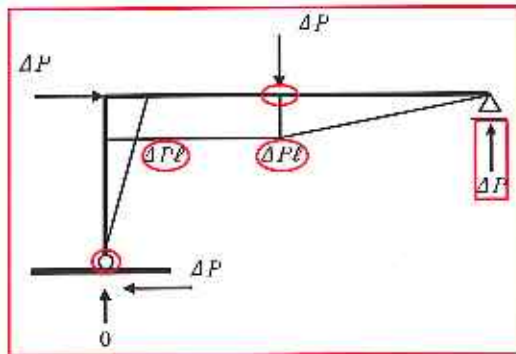


図 6.37 増分荷重  $\Delta P$  に対する新たな構造系の釣合

$\Delta P$  が漸増した時、 $M_B$ 、 $M_C$  どちらが先に降伏するかの判定は、上式から  $\Delta P_i$  をそれぞれ求めて、 $\Delta P_i$  が最小値となる点が次の降伏位置であるとすればよい。

$$M_B = \frac{3}{17} M_y + \Delta P_1 l = M_y \quad \text{とおけば、この時の } \Delta P_1 = \frac{14}{17} \left( \frac{M_y}{l} \right)$$

$$M_C = \frac{23}{34} M_y + \Delta P_2 l = M_y \quad \text{とおけば、この時の } \Delta P_2 = \frac{11}{34} \left( \frac{M_y}{l} \right) < \Delta P_1$$

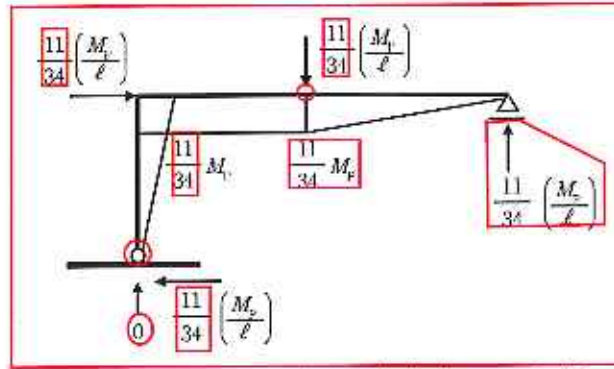


図 6.38 増分荷重限界に対する釣合曲げモーメント分布

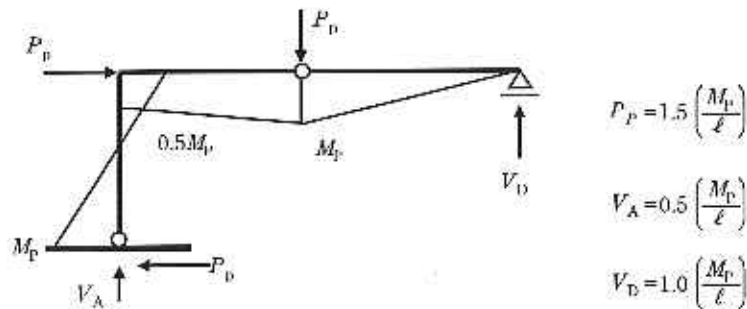


図 6.39 終局状態の釣合曲げモーメント分布

これより、 $M_C$ が先行して  $M_p$ に到達することが分かる。 $\Delta P$ が増分限界に達した時点の釣合を図 6.38 に示す。ラーメンの終局状態は図 6.36 と図 6.38 の和として図 6.39 のように表せる。

弾性限界および終局状態の B 点水平変位は、それぞれの釣合モーメント分布を利用して仮想仕事法で求めれば、

$$\delta_v = \frac{31}{102} \left( \frac{M_p \ell^2}{EI} \right), \quad \delta_p = \frac{289}{408} \left( \frac{M_p \ell^2}{EI} \right)$$

となる。ラーメン B 点の荷重と水平変位関係を図 6.40 に示す。

これまで、いくつかの例題でトラスやラーメンの弾塑性挙動を調べてきた。材料の弾塑性から始めて、そのような材料からなる部材の弾塑性を整理し、そしてこのような部材で構成される構造の弾塑性性状を見てきたのである。完全弾塑性モデルのように材料の塑性ひずみを許容すれば、構造は一般に弾性限界を超えて終局強度まで耐力が上昇する。

構造の強度を基準とした設計では、これまで調べてきたような「構造の終局耐力」を基準として安全率を設定するのが、一番分かりやすい。弾性

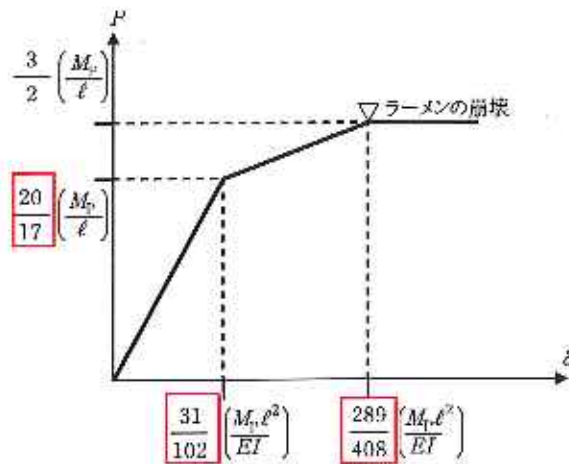


図 6.40 柱頭 B 点の荷重—水平変位関係

限界は構造の強度ではなく、弾塑性挙動の一つの通過点にすぎない。この考え方によれば、構造設計の「プロセス」で、簡単に構造の終局耐力\*を計算できる手法があると便利である。トラスでもラーメンでも、その終局状態（崩壊）に達した瞬間は、部材断面力と終局荷重（構造の終局耐力）の間で「釣合」が成立する。次節では、構造の「終局状態」だけに注目して、「釣合」条件から終局耐力を計算する方法について述べる。これは現代の構造設計に不可欠な知識と手法である。

## 6.5 骨組構造の崩壊

### 6.5.1 塑性崩壊と機構

前節では、トラス構造およびラーメン構造について、与えられた外力が比例漸増型の場合に限って、構造の弾塑性挙動を考察した。そこではステップ・バイ・ステップで、増分荷重に対する弾性応力解析を行い、これらを重ね合わせる方法で計算を進めた。部材の塑性化が進むと、次の段階の増分荷重に対しては構造の抵抗系が変わり、不静定次数が減少することも考察した（図 6.41、42）。

そしてこの計算法における「限界状態」は、ある増分荷重に対して「弾性解」が存在しないことであった。この状態を構造の塑性崩壊\*（或いは簡単に「崩壊」という）と定義する。増分荷重に対して不安定な状態になるということは、新たに外力を付け加えることなく、微小変形が可能な状態

\*構造の終局耐力＝構造の崩壊荷重

構造が耐え得る最大荷重のことをいう。外力（荷重）に抵抗する構造側からいえば最大荷重に釣合う抵抗が終局耐力である。曲げの卓越する完全弾塑性部材で構成される構造であれば、部材の持つ曲げ耐力に到達する部材が増えて構造の限界状態（崩壊）を迎える。このときの荷重を崩壊荷重という。

\*塑性崩壊

構造に作用する荷重が漸増して、部材のある位置の曲げモーメントが、部材の持つ最大の曲げ耐力（全塑性モーメント）に到達すると、それ以降、その点は一定の抵抗（全塑性モーメント）を持つヒンジとして挙動する。この塑性ヒンジの組合せで構造が不安定な状態になることを塑性崩壊という。

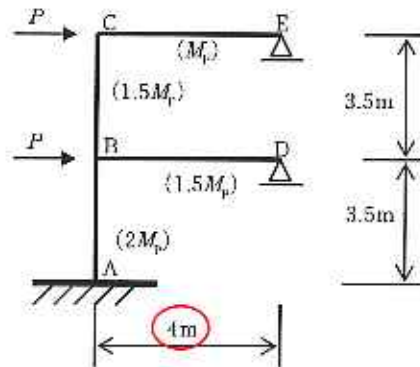


図 6.57 2層ラーメンの終局荷重を求める問題

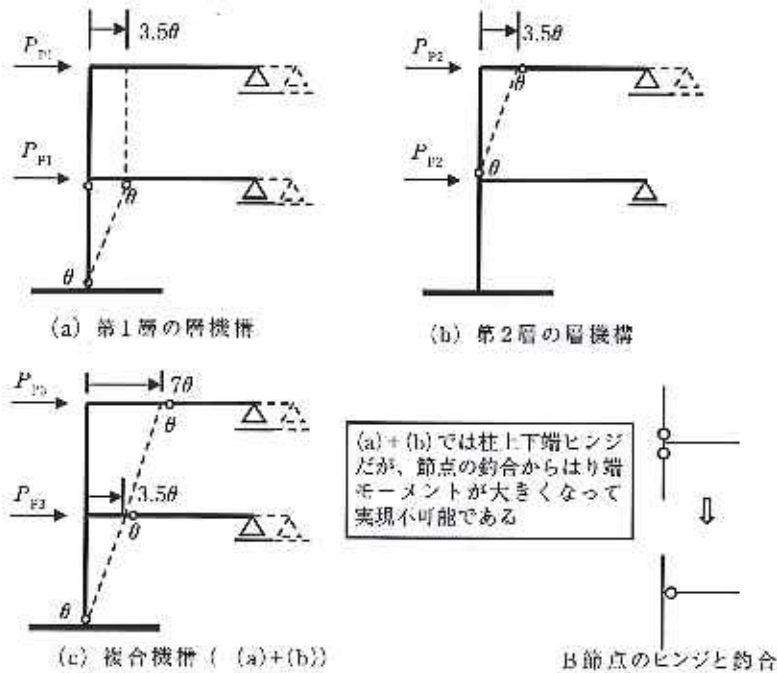


図 6.58 機構の組合せ

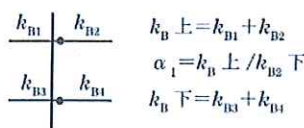
うに機構の微小変形=仮想変形を仮定する(図 6.55)。各機構に仮想仕事の原理を適用して最小荷重を求める(表 6.3)。この状態の釣合曲げモーメント分布を描いて降伏条件がチェックできればよい(図 6.56)。

図 6.57 に示す例題を考えよう。はり機構はないから、1層、2層の層機構が基本となる。機構を重ね合わせて複合機構を作る時、第1層はり節点モーメントの釣合で若干の考察が必要である(図 6.58)。それぞれの機構に対して仮想仕事の原理を適用すると表 6.4 の結果が得られる。この最小荷重に対して下界チェックのための釣合曲げモーメントを描くと図 6.59

# — 初版追加修正 —

付表 5.4 上下のはりの剛比変化のための修正値  $y_1$

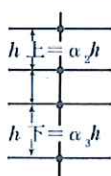
$\alpha_1 \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0.4	0.55	0.40	0.30	0.25	0.20	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.05	0.05	0.05	0.05
0.5	0.45	0.30	0.20	0.20	0.15	0.15	0.05	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05
0.6	0.30	0.20	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0
0.7	0.20	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0
0.8	0.15	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.9	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



$\alpha_1$ : 最下層は考えないでよい  
 上ばりの剛比が大きいたときには逆数をとって  
 $\alpha_1 = k_{B下} / k_{B上}$  として  $y_1$  を求め符号を負 (-) とする

付表 5.5 上下の層高変化による修正値  $y_2, y_3$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.6	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0
1.4	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.2	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4	-0.15	-0.10	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0	0.0

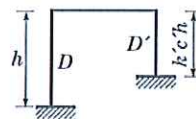


$y_3$ :  $\alpha_2 = h_{上} / h$  から求める  
 2 上層が高いときには正となる  
 $y_1$ :  $\alpha_3 = h_{下} / h$  から求める  
 3 ただし、最上層については  $y_2$  最上層については  $y_3$  を考えなくてよい  
 $y_2$ : 上層の層高変化による修正値  
 $y_3$ : 下層の層高変化による修正値

1) 層高が違うとき

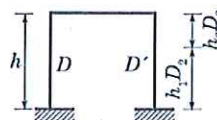
$$D' = a' k_e'$$

$$a' = a \times \left(\frac{h}{h'}\right)^2$$



2) 柱の間にはりをもつとき

$$D' = \frac{1}{\frac{1}{D_1} \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 + \frac{1}{D_2} \left(\frac{h_2}{h}\right)^2}$$



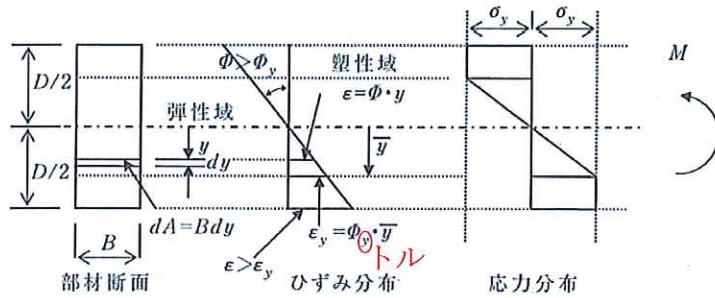


図 6.14 弾塑性曲げ応力とひずみの状態

ここで、 $Z$  は弾性断面係数である。

曲げモーメントが  $M_y$  を超えて増大すると、断面内の応力分布は弾性応力と塑性応力が混在することになる (図 6.14)。この状態で (6-7)、(6-8) 式のような断面の釣合いを考える。図 6.14 より、

$$\bar{y} = \frac{\epsilon_y}{\phi} \tag{6-10}$$

断面の釣合いを、弾性応力の曲げモーメント成分と塑性応力の曲げモーメント成分の和で表す。弾性域の断面積を  $A_e$ 、塑性域の断面積を  $A_p$ 、弾性曲げモーメント成分を  $M_e$ 、塑性曲げモーメント成分を  $M_p$  とすると、

$$M = M_e + M_p = \int_{A_e} E\phi y^2 dA + \int_{A_p} \sigma_y y dA = 2 \int_0^{\bar{y}} E\phi y^2 B dy + 2 \int_{\bar{y}}^{D/2} \sigma_y B dy \tag{6-11}$$

これを整理すると、

$$M = \frac{3}{2} M_y \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Phi_y}{\Phi} \right)^2 \right\} \tag{6-12}$$

(6-12) 式で  $\Phi \rightarrow \infty$  が  $M$  の最大値 ( $M_{\max} = \frac{3}{2} M_y$ ) である。これを全塑性モーメントあるいは終局曲げモーメント、終局曲げ耐力といい、 $M_0$ 、 $M_p$  などで表す。(6-11) 式で  $M_e \rightarrow 0$  とすると、

$$M = M_p = \frac{BD^2}{4} \sigma_y = Z_p \sigma_y \tag{6-13}$$

となって (6-12) 式の最大値と一致する。(6-13) 式中の  $Z_p$  を塑性断面係数といい、一般の断面では (6-14) 式によって求められる。

$$Z_p = \int_A y dA \tag{6-14}$$

ここまでの結果を  $M-\Phi$  関係で示すと図 6.15 のようになる。降伏モーメントを超えた領域の  $M-\Phi$  関係は非線形となるが、よく使われる H 形



鋼では降伏モーメントに対応する降伏曲率  $\phi_y$  の4倍程度で  $0.99M_p \doteq M_p$  となるので、図6.8の応力-ひずみ関係における完全弾塑性仮定と同様に、図6.15中の実線で示した「完全弾塑性  $M-\phi$  関係」モデルを設定することが多い。

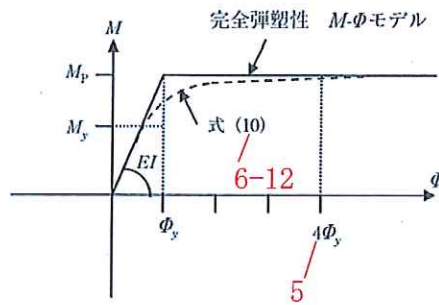


図 6.15 曲げモーメント-曲率関係

図6.15、縦軸の  $M_p/M_y$  は、 $M_p/M_y = Z_p\sigma_y/Z\sigma_y = Z_p/Z$  となって断面の性質だけで決まる数値なので、これを形状係数とよぶ。矩形断面では1.5、H形鋼ではよく1.14が使われる。使用頻度の高いH形鋼や角形鋼管、円形鋼管などについてはそれぞれの曲げ軸に対する弾性断面係数、塑性断面係数の値が設計用の数表として準備されている。

6.4 構造の弾塑性

6.4.1 トラスの弾塑性

図6.16のトラスを考えよう。これは最も単純な1次不静定トラスである。荷重  $P$  が漸増する時の部材断面力の推移と、荷重  $P$  作用点の  $P$  方向変位を追跡する。 $P$  が小さなうちは弾性体として応答するから (Step 1)、弾性解が利用できる (図6.17)。

構造の弾性限界は、トラス部材のどれかが降伏軸力\*に達する時点であ

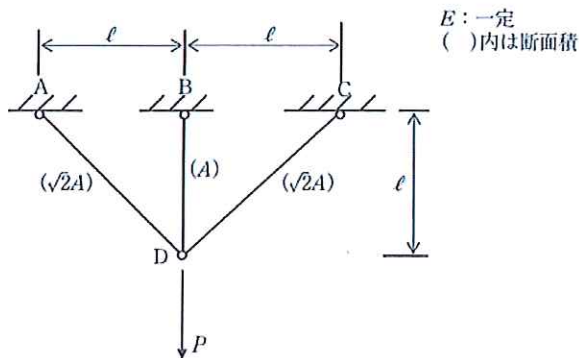


図 6.16 荷重  $P$  を受ける1次不静定トラス

\*降伏軸力 = 全塑性軸力  
完全弾塑性体からなる部材断面中心に軸力  $N$  だけを加える。力  $N$  を増せば断面内に均等に分布する応力  $\sigma$  も増える。そして断面内の応力  $\sigma$  が降伏点  $\sigma_y$  に到達した時、これに釣合う断面力  $N$  を全塑性軸力 ( $N_0$  または  $N_p$ )、または降伏軸力 ( $N_y$ ) という。

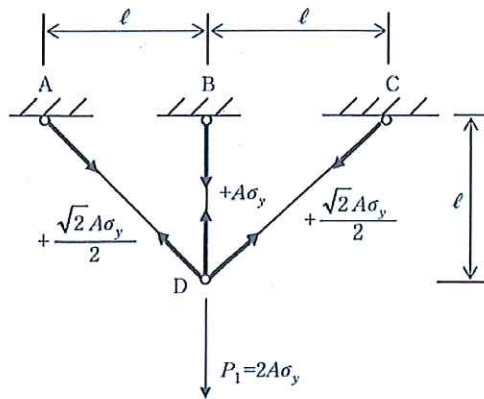


図 6.18 弾性限界荷重  $P_1$  と軸力の分布

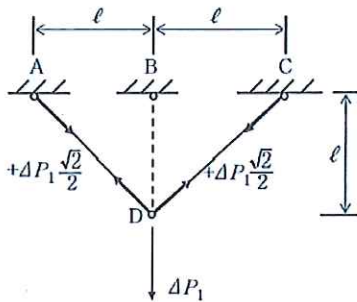


図 6.19 増分荷重  $\Delta P_1$  に対する応答

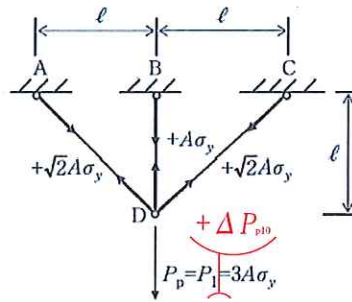


図 6.20 終局荷重と釣合断面力

$$N_{AD} = N_{CD} = \frac{\sqrt{2} A \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{2} \Delta P_1}{2} \quad (6-18)$$

荷重増分の限界は、新たに部材軸力  $N_{AD}$ 、 $N_{CD}$  が全塑性軸力に到達することによって決まる。即ち、

$$0 \leq \Delta P_1 \leq \Delta P_{p10}$$

$$N_{AD} = N_{CD} = \sqrt{2} A \sigma_y = \frac{\sqrt{2} A \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{2} \Delta P_{p10}}{2}$$

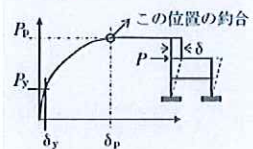
$$\text{これより、増分荷重限界値、} \Delta P_{p10} = A \sigma_y \quad (6-19)$$

この増分荷重限界値に対応する増分変位は、 $\frac{\sigma_y \ell}{E}$  である。

さらなる荷重増分  $\Delta P_2$  を想定しても (Step 3)、これに対する抵抗系はないから、 $\Delta P_2$  は存在し得ない。従ってこのトラスの終局荷重は  $P_1 + \Delta P_{p10}$  となる。対応する終局変形とともに終局状態の釣合\*を図 6.20 に、荷重—変位関係を図 6.21 に示す。**荷重**

文献 1 に示される例に倣ってもう 1 つ、トラスの弾塑性応答の例を示そう (図 6.22)。このトラスモデルは部材軸に平行な引張荷重に対してのみ

\*終局状態の釣合  
漸増荷重を受ける構造の部分が順次塑性化して、それ以上に荷重が増加できない状態の釣合。構造の荷重—変形関係でいえば、荷重が最大値に到達した後、対応する変形は不定となる。従って釣合は最大値に到達した瞬間の安定状態で考えるのである。



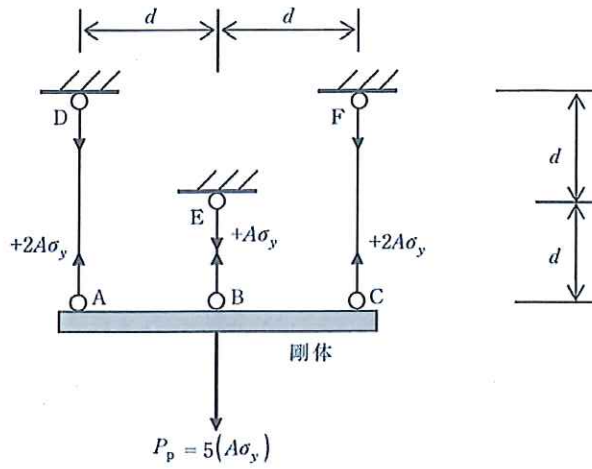


図 6.27 終局状態の釣合

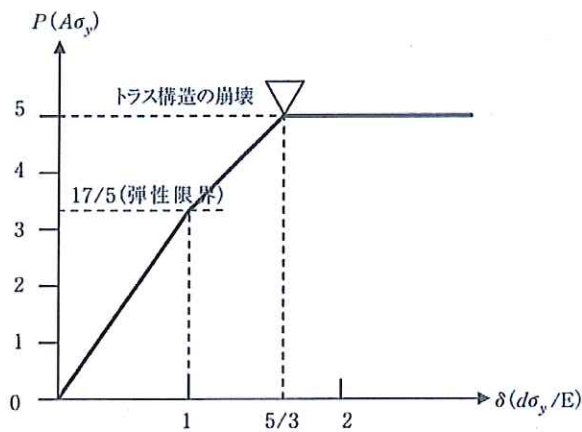


図 6.28 トラス構造の荷重-変位関係

( $\delta_2$ )

この弾塑性状態の限界は、 $T_1$  降伏か、 $T_3$  降伏のいずれかで決まる。

$T_1$  降伏を仮定すると、

$$T_1 = \frac{6}{5} A\sigma_y + \frac{\Delta P}{2} = 2A\sigma_y \quad \therefore \Delta P_3 = \frac{8}{5} (A\sigma_y)$$

$T_3$  降伏を仮定すると、

$$T_3 = \frac{6}{5} A\sigma_y + \frac{\Delta P}{2} = 3A\sigma_y \quad \therefore \Delta P_3 = \frac{18}{5} (A\sigma_y)$$

$\Delta P_3$  の最小値は  $T_1$  降伏の場合である。従って終局状態の軸力は、

$$T_1 = 2A\sigma_y \quad (\text{降伏}) \quad \delta_1 = 2 \left( \frac{d\sigma_y}{E} \right)$$

$$T_2 = A\sigma_y \quad (\text{降伏}) \quad \delta_2 = \frac{5}{3} \left( \frac{d\sigma_y}{E} \right)$$

$$T_3 = 2A\sigma_y < 3A\sigma_y \quad (\text{弾性})$$

$$\delta_3 = \frac{4}{3} \left( \frac{d\sigma_y}{E} \right)$$

終局状態の釣合を図 6.27 に、トラス構造の荷重—変位関係を図 6.28 にまとめて示す。

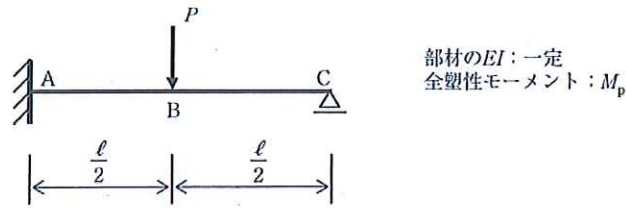


### 6.4.2 ラーメンの弾塑性

ここでは、曲げの影響が卓越する構造の弾塑性を検討する。まず、図 6.29 に示す「はり」を考えよう。はり断面が一定で中央に集中荷重  $P$  を受けている。荷重  $P$  が漸増する時のはりの弾塑性挙動を考えるのである。部材はせん断によって降伏することはなく、全塑性モーメントはせん断に影響されないとする。

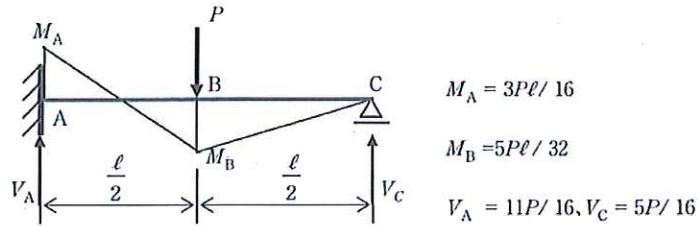
弾性解とその限界は図 6.30 の通りである。

次に荷重  $P$  がさらに増加して構造が弾塑性応答をする状態を考えよう。荷重を  $P = P_y + \Delta P$  で表す。  $\Delta P$  は弾性限界からの荷重増分である。この



部材の  $EI$  : 一定  
全塑性モーメント :  $M_p$

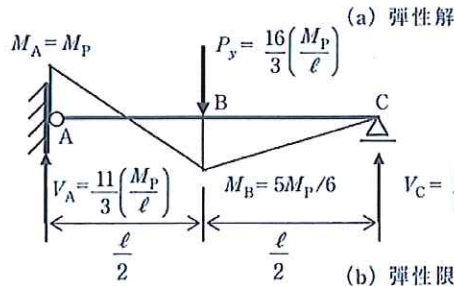
図 6.29 1次不静定構造のはり



$$M_A = 3P\ell / 16$$

$$M_B = 5P\ell / 32$$

$$V_A = 11P / 16, V_C = 5P / 16$$



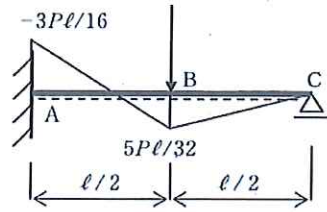
(a) 弾性解

(b) 弾性限界の荷重  $P_y$  と釣合曲げモーメント

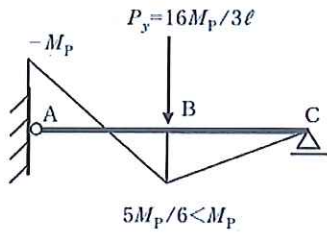
図 6.30 弾性限界荷重  $P_y$  と釣合曲げモーメント分布

表 6.5 仮想仕事法による B 点鉛直変位の計算

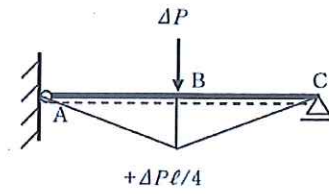
部材	$\beta_0/k$	$M_0$	$C$	$M_0-C$	$r_0$	$M_1$	$\delta_1$	$M_2$	$\delta_2$
A		$-M_p$	0	$-M_p$	$-M_p\beta_0$	$-\ell/2$	$M_p\ell\beta_0/2$	0	0
B	$\beta_0$	$+M_p$	0	$+M_p$	$+M_p\beta_0$	0	0	$\ell/4$	$M_p\ell\beta_0/4$
B		$+M_p$	0	$+M_p$	$+2M_p\beta_0$	0	0	$\ell/4$	$2M_p\ell\beta_0/4$
C	$\beta_0$	0	0	0	$+M_p\beta_0$	0	0	0	0
合計							$M_p\ell\beta_0/2$	トル	$3M_p\ell\beta_0/4$



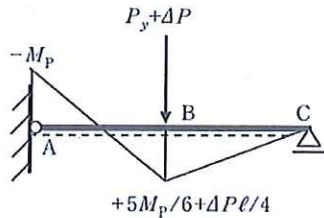
(a) 集中荷重を受けるはりの M 図  
( $E, I, M_p$ :一定) 弾性解



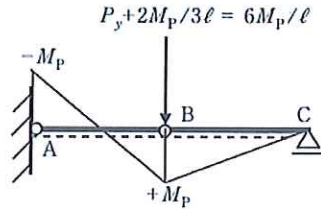
(b) 弾性限界の  $M_y$  図 (A 点ヒンジ)



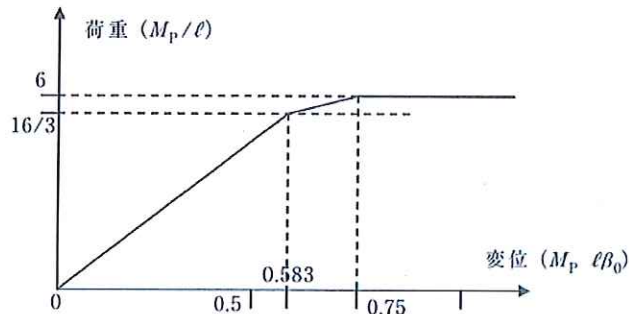
(c) 増分荷重  $\Delta P$  による  $M$  図



(d) 弾塑性状態の  $M$  図



(e) 終局状態の  $M$  図



(f) 弾塑性荷重-変形関係

図 6.62 荷重増分解析による弾性限界、終局荷重時の  $M$  図と、対応する変形