

# 基礎から実践 構造力学



編著  
大垣 賀津雄

著者  
大山 理  
石川 敏之  
谷口 望  
宮下 剛

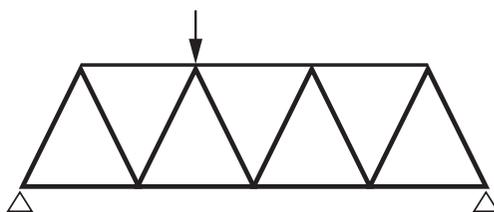
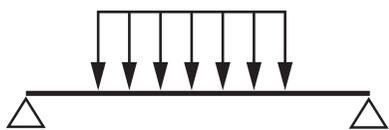
理工図書



# 基礎から実践 構造力学

編著  
大垣 賀津雄

著者  
大山 理之  
石川 敏之  
谷口 望剛  
宮下 剛







---

## 第 1 章 構造力学と構造設計

1.1 はじめに .....	1
1.2 構造力学とは .....	2
1.3 建設構造設計 .....	3
1.4 本書の構成 .....	4

---

## 第 2 章 力のつり合いと支点反力

2.1 力のつり合い .....	5
2.2 構造モデルと荷重 .....	6
2.3 支点反力 .....	9
2.3.1 支点の種類 .....	9
2.3.2 外力（力とモーメント）の符号の約束 .....	10
2.3.3 支点反力の求め方 .....	10

---

## 第 3 章 断面力の求め方

3.1 断面力とは .....	23
3.2 断面力の符号 .....	24
3.3 断面力の計算法 .....	24

---

## 第4章 トラス構造の解法

4.1 トラス構造の種類	47
4.2 節点法による解法	52
4.3 切断法による解法	55

---

## 第5章 応力度の計算

5.1 構造材料の力学的性質	59
5.2 断面諸元	60
5.2.1 断面1次モーメント	61
5.2.2 断面2次モーメント	63
5.3 部材の応力度	68
5.3.1 軸力による直応力度	68
5.3.2 曲げによる直応力度	70
5.3.3 はりに生じるせん断応力度	73

---

## 第6章 はりのたわみの計算

6.1 はりの微分方程式の導出	77
6.1.1 はりの曲げ応力	77
6.1.2 はりの曲率	79
6.1.3 微小領域における力のつり合い	80
6.1.4 集中荷重を受けるはり	81
6.1.5 微分方程式の整理と解法	83
6.1.6 境界条件	84
6.2 2階の微分方程式を用いる解法 (式 (6.15))	85
6.3 4階の微分方程式を用いる解法 (式 (6.19))	89
6.4 4階の微分方程式を用いる解法 (式 (6.20))	94
6.5 弾性荷重法 (モールの定理)	98
6.5.1 物理量の関係	98

6.5.2	共役はり	98
6.5.3	弾性荷重法（モールの定理）による解法の手順	99

## 第7章 影響線

7.1	影響線の必要性	109
7.2	影響線、影響線図とは	111
7.2.1	はりの影響線	111
7.2.2	トラスの影響線	113
7.3	影響線の利用方法	117
7.3.1	多軸の移動荷重に対する応答を求める場合	117
7.3.2	分布荷重が作用する場合の応答を求める場合	119

## 第8章 エネルギー法

8.1	仕事とひずみエネルギー	121
8.1.1	軸力を受ける部材のひずみエネルギー	122
8.1.2	曲げモーメントを受ける部材のひずみエネルギー	123
8.1.3	せん断力を受ける部材のひずみエネルギー	124
8.1.4	部材に蓄えられる全体のひずみエネルギー	124
8.2	相反定理	124
8.3	仮想仕事の原理と単位荷重法	125
8.3.1	軸力がなす内部仮想仕事	126
8.3.2	曲げモーメントがなす内部仮想仕事	128
8.3.3	せん断力がなす内部仮想仕事	129
8.4	カスティリアノの定理と最小仕事の原理	129
8.4.1	カスティリアノの定理の証明	129
8.4.2	カスティリアノの定理を用いた解法	130
8.5	余力法	131
8.5.1	弾性方程式と余力法	131
8.5.2	余力法を用いた不静定力の解法	133
8.6	最小仕事の原理	135

8.6.1	最小仕事の原理	135
8.6.2	最小仕事の原理を用いた不静定構造の解法	136

## 第9章 不静定構造物の計算

9.1	不静定次数	141
9.1.1	はりの場合	141
9.1.2	トラスの場合	143
9.2	たわみ角法	145
9.2.1	たわみ角法の定式化	146
9.2.2	たわみ角法（集中荷重を受ける両端固定はり）	149
9.2.3	たわみ角法（集中荷重を受ける両端固定連続はり）	152
9.2.4	たわみ角法（集中荷重を受けるラーメン構造）	155

## 第10章 柱と座屈

10.1	柱と座屈	161
10.2	短い柱	162
10.2.1	短柱に生じる応力の計算	164
10.2.2	核の計算	164
10.3	長い柱	165
10.3.1	座屈荷重	165
10.3.2	細長比パラメータと有効座屈長	167
10.3.3	座屈荷重の計算	168
10.4	板の座屈	169
10.4.1	板の座屈応力	169
10.4.2	板の座屈応力の計算	171

## 第11章 鉄筋コンクリート

11.1	鉄筋コンクリート構造	173
------	------------	-----

11.1.1	コンクリート材料	173
11.1.2	補強鉄筋	176
11.1.3	鉄筋コンクリート柱	178
11.1.4	鉄筋コンクリートはり	180
<b>11.2</b>	<b>曲げ応力度の計算</b>	<b>181</b>
11.2.1	計算上の仮定	181
11.2.2	曲げ応力度の計算	182
<b>11.3</b>	<b>はりの終局強度</b>	<b>187</b>
11.3.1	計算上の仮定	187
11.3.2	等価応力ブロック法	187
11.3.3	終局曲げモーメントの計算	189

## 第12章 鋼構造

<b>12.1</b>	<b>鋼構造</b>	<b>193</b>
<b>12.2</b>	<b>鋼部材の圧縮強度</b>	<b>194</b>
12.2.1	圧縮を受ける柱の基準圧縮強度曲線（全体座屈）	195
12.2.2	横倒れ座屈に対する基準耐荷力曲線（全体座屈）	195
12.2.3	圧縮応力を受ける板の基準圧縮強度曲線（局部座屈）	196
12.2.4	基準圧縮強度の計算例	197
<b>12.3</b>	<b>鋼桁および合成桁の断面に生じる応力分布</b>	<b>198</b>
<b>12.4</b>	<b>崩壊荷重</b>	<b>201</b>
12.4.1	鋼の応力-ひずみ関係	201
12.4.2	降伏モーメントと全塑性モーメント	202
12.4.3	崩壊荷重の計算	205
<b>付録</b>		<b>212</b>
<b>問題解答</b>		<b>216</b>
<b>索引</b>		<b>223</b>



# 第1章 構造力学と構造設計

本書は大学課程の専門基礎授業に適した、講義用テキストとしてまとめている。また、本書は就職後も設計など業務で参考になるように、鉄筋コンクリートや鋼構造の設計における基礎的事項などの情報を掲載しており、社会人になっても利用できるものとしている。備考欄には専門用語の説明、英訳、単位の説明、実務における計算方法の適用などの基本情報を掲載している。

## 1.1 はじめに

建設構造物が備えるべき要件に、古くから「用・強・美」という概念がある。これは、**建築**<sup>①</sup>や**インフラ構造物**<sup>②</sup>が要求されている機能を満たし、長期間の使用に耐える強度と耐久性を持ち、かつ美しいと感じなければならないという思想である。インフラ構造物の歴史的遺産としていまなお残っている石橋（**図 1.1**）などは、長い年月を経たいまでもその機能（用）を果たし、耐久性などの安全性（強）が確保されている。しかもその美しさはその地域の風景とマッチングしている。

近年、高層ビルなどの**建築**（**図 1.2**）や橋梁（**図 1.3**）などのインフラ構造物に用いられている材料は、コンクリートや鋼材が主流である。都市や市民の暮らしに役立つ安定した空間を確保するため



図 1.1 スターリ・モスト



図 1.2 スパイラルタワーズ

- ① Architecture は建設物を造る行為（過程、技術）を意味し、Building は建設物を意味する。
- ② Infrastructure  
インフラ構造物は主に社会生活に必要な公共構造物を意味する。

- ③ Stress  
応力は部材に生じる内力（応力度）を意味する。建築分野では部材に生じる力（断面力）のことを単に応力という場合がある。
- ④ Deformation  
外力が加わった際に生じるたわみなどの応答をいう。
- ⑤ Structural Mechanics
- ⑥ Materials Mechanics  
材料力学は、材料の変形、破壊特性を知るための学問を意味する。
- ⑦ Digital Transformation  
デジタル技術を活用し、人々の生活や業務を効率よい状態へ変革する技術である。建設分野では、リモート建設、BIM、CIM、VR、3Dプリンタ建設、モジュール化、AI診断、スマートシティなどの技術導入をいう場合が多い。
- ⑧ Strain  
単位長さあたりの変形量を意味する。構造力学上重要な指標である。
- ⑨ Load-bearing Performance  
耐荷性能は、対象としている建設部材が終局状態に至る強度特性を

に、これらの材料を用いた構造物に外力が加わったときの**応力**③および**変形**④を計算して、その安全性を確認する必要がある。本書はそのための基礎知識を得て、これらの設計、施工および維持管理業務に役立つようにまとめられたものである。



図 1.3 レインボーブリッジ

## 1.2 構造力学とは

**構造力学**⑥は建築物、橋梁などのインフラ構造物が、供用時の荷重を受けたときに生じる応力や変形などを計算するための理論体系である。主に建築物、橋梁、船舶、航空機などの構造物に外力が加わったときに各部材に生じる内力と変形を分析するために構造力学が用いられる。建築工学や土木工学の建設分野では根幹を成す学問分野であり、専門基礎の授業として位置付けられている。単一部材での分析を基礎とする**材料力学**⑥とは区別されているが、重なり合う要素が多くあり、本書では材料力学分野もある程度カバーできるようにしている。

建設分野で構造力学を学ぶ目的は以下の通りである。

- (1) 構造力学は、建物や橋などの構造物の設計や構造解析に必要な基礎知識を得る。
- (2) 構造力学を学ぶことで、構造部材の応力や変形、構造物全体の耐荷性能などを知る。
- (3) 効率的な設計、施工管理、点検、診断およびDX⑦などの業務を行うための知識を得る。

構造力学は建設分野において非常に重要な役割を担っている建築物、橋梁、鉄塔、ダム、トンネルなどの構造物の設計と解析に欠かせない知識である。構造物はさまざまな荷重や外力にさらされ、それに対して安全かつ効率的に応答させる必要がある。構造力学を理解することで、構造の安定性や応力度、**ひずみ**⑧の分布を予測し、設計や解析に基づいた最適な構造物を実現することができる。市民の安全を守るために非常に重要であり、外力に対する**耐荷性能**⑨、**耐震性能**⑩などの安全性を確保することができる。

本書は、構造力学の基礎知識の学習を行うことを目的として発刊したも

のである。構造物と構造力学との関係をわかりやすく説明し、実際の構造物への力学的な挙動を推定するために重要な学問である。本書を通じて修得した構造力学の理論を、実際の構造物や試験体に適用して、実験や計測を行って荷重の受け方や応力分布などを観察することができれば、より興味が深まって一流の技術者に成長するであろう。

### 1.3 建設構造設計

表 1.1 に示す通り、建設工事における発注者の役割は、プロジェクトの計画と条件を決定し、完成させて供用できるまでの全体管理を行うことにある。発注者は建設物の使用目的に応じた品質基準、工事予算、工期、安全基準、および環境基準などを設定して、建設完了までの計画と契約条件を加味して工事発注を行うこととなる。

表 1.1 建設工事の分担

発注者	設計者	建設者
国土交通省，地方自治体 道路会社，鉄道会社 建築主など	コンサルタント，設計事務所 (意匠設計者，構造設計者， 設備設計者)	建設会社 専門工事会社

コンサルタントや設計事務所は、建設工事に必要な技術的な助言と専門知識を提供し、企画段階では意匠設計や基本設計を行い、建設着手直前には具体的な構造設計を行う。この際に構造計算書、図面などを成果品として提示して、発注者の承諾を得る。建築構造物では構造設計者と設備設計者が異なる場合もある。インフラ構造物ではコンサルタントがこれらの業務を行っている。

工事を受注した建設会社は、実際の建設作業を担当する。施工図や仕様にしたがって工事を進め、安全や環境に配慮しつつ、工期内に完成させることを目指して**施工管理**<sup>⑩</sup>する。

建設構造設計において、国土交通省告示、道路橋示方書、鉄道構造物等設計標準、建築基準法などの基準や制度にしたがい、実施詳細設計を行う。この際に、構造力学の理論に基づいた構造計算、構造解析を実施して設計計算書を作成する。その設計した部材断面を図面化して、製作、施工できるようにすることが構造設計者の重要な役目となる。

意味する。

- ⑩ Earthquake Resistance  
地震力に対する耐荷性能を意味する。

- ⑪ Construction Management  
建設分野の施工管理とは安全 Safety、品質 Quality、工程 Delivery、原価 Cost の 4 項目の管理を行うことである。5 つめの管理項目として環境 Environment を含める場合がある。

## 1.4 本書の構成

本書では各章を表 1.2 に示すように構成し、構造設計を行う際に必要な情報を学ぶことができる。

表 1.2 本書の構成

第1章 構造力学と構造設計	概論, 構造力学, 建設構造設計, 本書の構成
第2章 力のつり合いと支点反力	力のつり合い, 構造モデルと荷重, 支点反力
第3章 断面力の求め方	断面力とは, 断面力の符号, 断面力の計算法, 静定ラーメン
第4章 トラス構造の解法	トラス構造の種類, 節点法による解法, 切断法による解法
第5章 応力度の計算	構造材料の力学的性質, 断面諸元, 部材の応力度
第6章 はりのたわみの計算	たわみとたわみ角, 微分方程式を用いる方法, モールの解法 (弾性荷重法)
第7章 影響線	影響線の必要性, 影響線図, 影響線の利用方法
第8章 エネルギー法	仕事とひずみエネルギー, 相反定理, 仮想仕事の原理と単位荷重法, カステリアノの定理, 余力法, 最小仕事の原理
第9章 不静定構造物の計算	不静定次数, たわみ角法
第10章 柱と座屈	柱と座屈, 短い柱, 長い柱, 板の座屈
第11章 鉄筋コンクリート	鉄筋コンクリート構造, 応力度の計算, はりの終局強度
第12章 鋼構造	鋼構造, 鋼部材の圧縮強度, 鋼桁および合成桁の断面に生じる応力分布, 崩壊荷重

## 第2章 力のつり合いと支点反力

構造物，その代表例である橋梁（きょうりょう）には，自重，車や列車などの移動荷重，さらに，温度変化や地震力など種々の荷重が作用する。設計を行うに際し，まず，これらの荷重に対して，構造物をしっかりと支える必要がある。

本章では，力のつり合い条件式に基づいて，下から支える力，つまり，支点反力の求め方を説明する。

### 2.1 力のつり合い

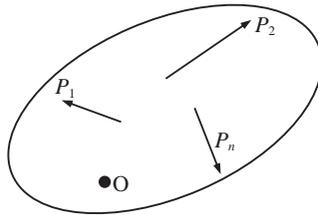


図 2.1 1 点に作用しない多くの力のつり合い

図 2.1 に示す 1 点に作用しない多くの力<sup>①</sup>が作用する力のつり合い条件式は，以下のように与えられる。

水平（horizontal）方向に作用するすべての力がつり合っている。

$$\sum H_i = 0 \quad (2.1)$$

鉛直（vertical）方向に作用するすべての力がつり合っている。

$$\sum V_i = 0 \quad (2.2)$$

回転させようとするすべての力，つまり，モーメント（moment）がつり合っている。

$$\sum M_i = 0 \quad (2.3)$$

すなわち，『すべての力の水平分力の代数和，鉛直分力の代数和ならびに任意点に関するモーメントの代数和がそれぞれ 0 になる』ということである。

① 物体の運動状態に変化（速度の変化）を生じさせる原因となるものを力（Force）という。構造力学では，力の大きさ，方向に加えて作用点についても考える必要がある（力の三要素）。

力の単位は，国際単位系（SI 単位系）が用いられ，1kg の質量に  $1\text{m/s}^2$  の加速度を生じさせる力を 1N（ニュートン）と定義している。

$$1\text{N} = 1\text{kg} \times 1\text{m/s}^2$$

モーメントは，力  $P$  と回転中心から作用線までの距離  $a$  の積で表される

$$M = Pa$$

## 2.2 構造モデルと荷重

② Concentrated Load

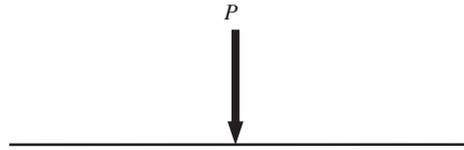
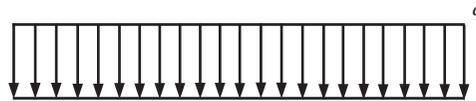
・集中荷重<sup>②</sup>

集中荷重とは、図 2.2 に示すように、全重量が1点に集中して作用すると仮定できる荷重をいう。

③ Distributed Load

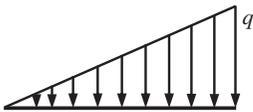
・分布荷重<sup>③</sup>

分布荷重とは、図 2.3 に示すように分布力に相当する荷重で、その大きさは、単位長さあたりの力で表される。

図 2.2 集中荷重<sup>④</sup>図 2.3 等分布荷重<sup>⑤</sup>

④ 一般的に用いられる単位の例は、kN、N などである (1 kN=1000 N)。

⑤ 一般的に用いられる単位の例は、kN/m、N/cm などである。  
また、等変分布 (三角形) 荷重もある。



今後、力のつり合い計算を行うに際し、分布荷重を集中荷重に置き換える必要がある。そこで、まず、「Varignon (バリノン) の定理」を説明する。同定理は、「物体に多くの平行な力が作用する場合、ある点に関するそれぞれの力によるモーメントの総和は、それらの合力のある点に関するモーメントに等しい」ということができる。つまり、図 2.4 に示すような多くの平行な力  $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$  の合力  $R$  の作用線は、これらの力に平行で、その大きさは、式 (2.4) で表される。

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad (2.4)$$

また、 $P_i$  の任意の1点  $O$  からの長さ  $e$ 、合力  $R$  のそれを  $e$  とすれば、式 (2.5) が得られ、合力  $R$  の作用線位置が定まる。

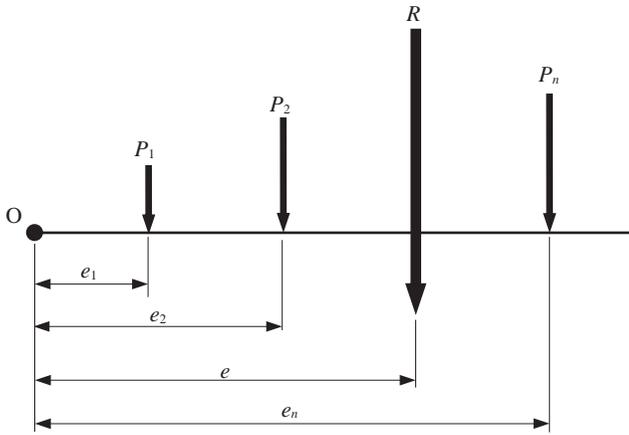


図 2.4 Varignon (バリノン) の定理

$$e = \frac{\sum_{i=1}^n P_i e_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (2.5)$$

上記の定理を用いて、等分布荷重および等変分布荷重の合力とその作用位置を求める。

### 等分布荷重

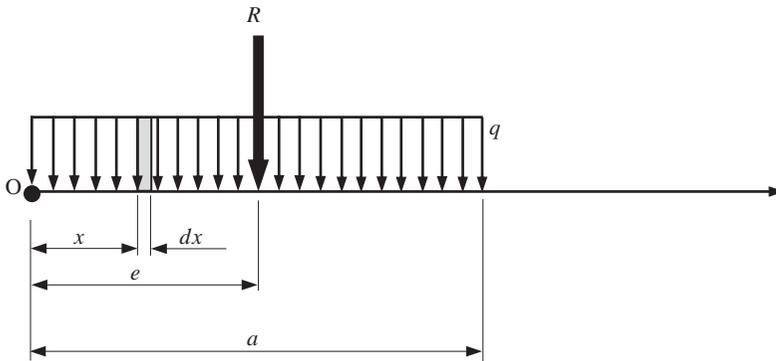


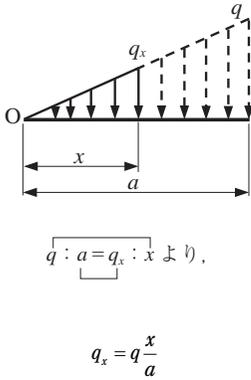
図 2.5 等分布荷重作用時の合力とその作用位置

図 2.5 に示すように、点 O より  $x$  離れた位置での微小区間を  $dx$  とすれば、この区間に作用する集中荷重は  $qdx$  で表される。これを 1 つの分力と仮定すると、合力  $R$  は式 (2.6) のように求められる。

$$R = \sum qdx = q \int_0^a dx = qa \quad (2.6)$$

そして、点 O に関する分力モーメントの総和は式 (2.7) で表され、両式より作用位置  $e$  は式 (2.8) で求められる。

- ⑥ 点Oからx離れた位置における分布荷重の大きさは、以下の関係より、誘導することができる。



$$\sum x \cdot q dx = q \int_0^a x dx = \frac{qa^2}{2} \tag{2.7}$$

$$e = \frac{\sum x \cdot q dx}{\sum q dx} = \frac{\frac{qa^2}{2}}{qa} = \frac{a}{2} \tag{2.8}$$

等変分布荷重

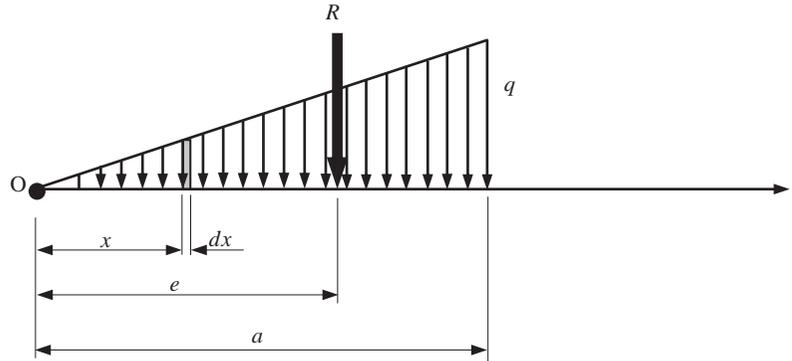


図 2.6 等変分布荷重作用時の合力とその作用位置

図 2.6 に示すように、点Oよりx離れた位置での微小区間をdxとすれば、この区間に作用する集中荷重は  $q \frac{x}{a} dx$  で表される<sup>⑥</sup>。これを1つの分力と仮定すると、合力Rは式(2.9)のように求められる。

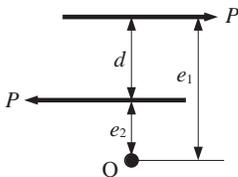
$$R = \sum q \frac{x}{a} dx = \frac{q}{a} \int_0^a x dx = \frac{qa}{2} \tag{2.9}$$

そして、点Oに関する分力モーメントの総和は式(2.10)で表され、両式より作用位置eは式(2.11)で求められる。

$$\sum x \cdot q \frac{x}{a} dx = \frac{q}{a} \int_0^a x^2 dx = \frac{qa^2}{3} \tag{2.10}$$

$$e = \frac{\sum x \cdot q \frac{x}{a} dx}{\sum q \frac{x}{a} dx} = \frac{\frac{qa^2}{3}}{\frac{qa}{2}} = \frac{2}{3} a \tag{2.11}$$

- ⑦ 集中モーメント（モーメント荷重）



その中で、大きさPが等しく、向きが反対の平行な2つの力を偶力（Couple of Force）という。さらに、 $M = Pe_1 - Pe_2 = Pd$  となり、このモーメントを偶力モーメント（Moment of Couple）という。

以上より、等分布荷重および等変分布荷重の合力の大きさは、力の分布図の面積に等しく、その作用位置は、図形の幾何学的な重心を通ることがわかる。

他にも、集中モーメント（モーメント荷重）という荷重がある<sup>⑦</sup>。

## 2.3 支点反力

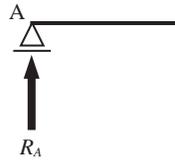
### 2.3.1 支点の種類

#### (1) ローラー（移動）支点，ヒンジ（回転）支点（図 2.7）

ローラー（移動）支点は，鉛直な方向の移動を拘束するが，水平方向の移動と回転は拘束せず，反力数は鉛直方向 1 つのみである。一方，ヒンジ（回転）支点は，鉛直および水平方向の移動を拘束するが，回転は拘束せず，反力は鉛直および水平方向の 2 つとなる。



・ローラー支点



・ヒンジ支点

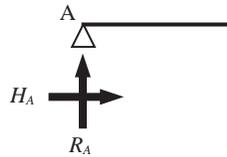


図 2.7 ローラー（移動）支点，ヒンジ（回転）支点

#### (2) 固定支点（固定端）（図 2.8）

固定支点（固定端ともいわれる）は，鉛直，水平方向ならびに回転のすべてを拘束し，反力数は，鉛直，水平反力ならびに固定モーメントの 3 つとなる。

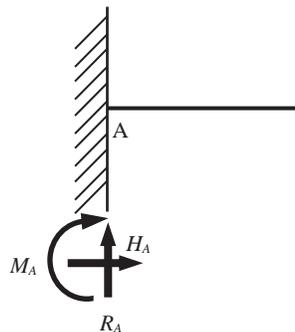


図 2.8 固定支点（固定端）

## 2.3.2 外力（力とモーメント）の符号の約束

- (1) 水平方向の外力は、右向きに作用するとき**正**、左向きに作用するとき**負**とする。
- (2) 鉛直方向の外力は、上向きに作用するとき**正**、下向きに作用するとき**負**とする。
- (3) 外力によるモーメントは、時計回りに作用するとき**正**、反時計回りに作用するとき**負**とする。

## 2.3.3 支点反力の求め方

Step-1 :

支点の種類に応じて、正しい数の反力を⊕方向に仮定する。

Step-2 :

斜め方向の荷重→鉛直および水平分力を求める。

Step-3 :

分布荷重→合力の大きさと作用位置を定める。

Step-4 :

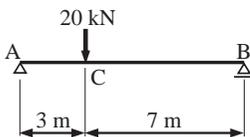
力のつり合い条件式（ $\sum H=0$ ， $\sum V=0$ ， $\sum M=0$ ）を用いて、反力の大きさと方向を決定する。

Step-5 :

検算を行う。

## 問題 2.1

以下の単純はりに作用する支点反力の値を求めなさい。



## 例題 2.1 集中荷重が載荷された単純はりの支点反力

図 2.9 に示す通り、ヒンジ支点とローラー支点によって両端を支持されたはりを単純はりと呼ぶ。

いま、点 AB の支間中央（点 C）に集中荷重  $P$  が作用した単純はりの支点反力を求める。

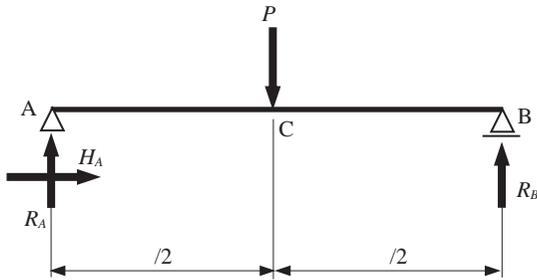


図 2.9 集中荷重が載荷された単純はり

まず、単純はりに作用する支点反力 ( $R_A, R_B$  ならびに  $H_A$ ) は、同図に示すように正の向きに仮定する。

次に、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A = 0$$

$$\sum V = 0 : \frac{R_A + R_B - P}{\text{上向き 下向き}} = 0 \text{ より, } R_A + R_B = P \quad (\text{a})$$

$$\sum M_{at A} = 0 : \frac{P \times \frac{l}{2} - R_B \times l}{\text{時計回り 反時計回り}} = 0 \text{ より, } R_B = \frac{P}{2}$$

点 A まわりのモーメント

$$\text{式 (a) より, } R_B = P - R_A = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$$

<検算>

$$\sum M_{at B} = 0 : R_A \times l - P \times \frac{l}{2} = 0 \text{ より, } R_A = \frac{P}{2}$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、

図 2.9 の仮定通りと判定される。

### 例題 2.2 斜め方向の集中荷重が載荷された単純はりの支点反力

まず、単純はりに作用する支点反力 ( $R_A, R_B$  ならびに  $H_A$ ) は、図 2.10 に示すように正の向きに仮定する。

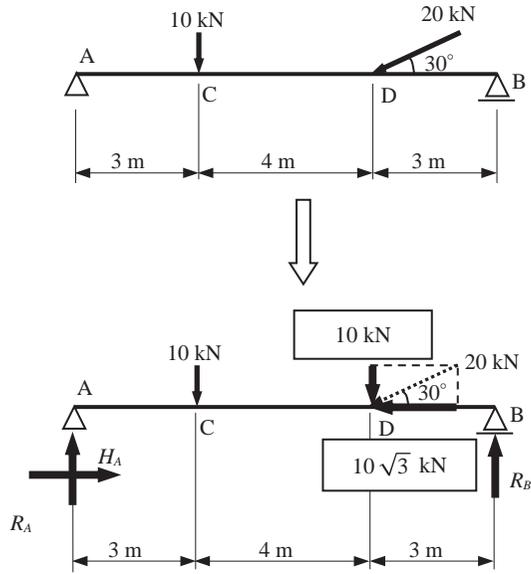
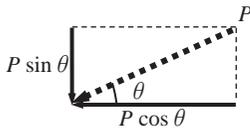


図 2.10 鉛直と斜め方向の集中荷重が載荷された単純はり

⑧ 斜め方向の集中荷重の分解



水平分力

$$H_i = P \cos \theta$$

鉛直分力

$$V_i = P \sin \theta$$

次に、点Dに作用している集中荷重を、水平および鉛直力に分解する<sup>⑧</sup>。そして、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A - 10\sqrt{3} = 0 \text{ より, } H_A = 10\sqrt{3} \text{ kN}$$

右向き 左向き

$$\sum V = 0 : R_A + R_B - 10 - 10 = 0 \text{ より, } R_A + R_B = 20 \text{ kN} \quad (\text{b})$$

上向き 下向き

$$\sum M_{at A} = 0 : 10 \times 3 + 10 \times 7 - R_B \times 10 = 0 \text{ より,}$$

点 A まわり 時計回り 時計回り 反時計回り  
のモーメント

$$R_B = \frac{10 \times 3 + 10 \times 7}{10} = 10 \text{ kN}$$

式 (b) より,  $R_A = 20 - R_B = 20 - 10 = 10 \text{ kN}$

<検算>

$$\sum M_{at B} = 0 : R_A \times 10 - 10 \times 7 - 10 \times 3 = 0 \text{ より, } R_A = 10 \text{ kN}$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、

図 2.10 の仮定通りと判定される。

### 例題 2.3 等分布荷重が載荷された単純はりの支点反力

まず、単純はりに作用する支点反力 ( $R_A, R_B$  ならびに  $H_A$ ) は、**図 2.11** に示すように正の向きに仮定する。

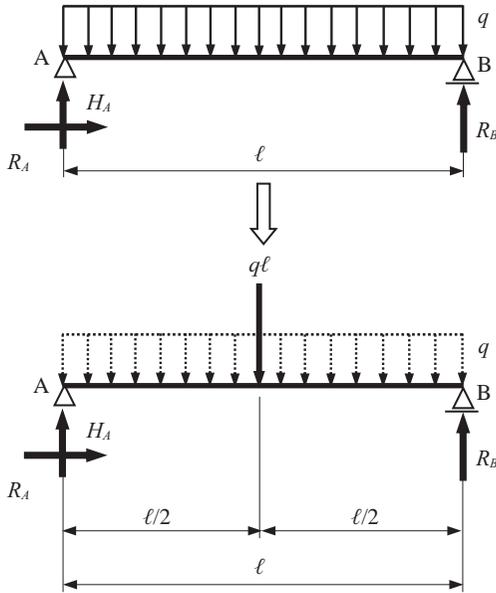


図 2.11 等分布荷重が載荷された単純はり

次に、等分布荷重の合力は  $q\ell$  であり、作用線の位置は、**図 2.11** に示す通りである。

そして、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A = 0$$

$$\sum V = 0 : R_A + R_B - q\ell = 0 \text{ より, } R_A + R_B = q\ell \quad (\text{c})$$

$$\sum M_{at A} = 0 : q\ell \times \frac{\ell}{2} - R_B \times \ell = 0 \text{ より, } R_B = \frac{q\ell}{2}$$

式 (c) より,  $R_A = q\ell - R_B = q\ell - \frac{q\ell}{2} = \frac{q\ell}{2}$

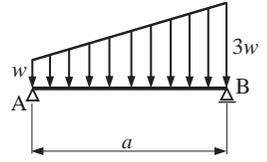
<検算>

$$\sum M_{at B} = 0 : R_A \times \ell - q\ell \times \frac{\ell}{2} = 0 \text{ より, } R_A = \frac{q\ell}{2}$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、**図 2.11** の仮定通りと判定される。

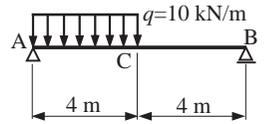
### 問題 2.2

以下の単純はりに作用する支点反力の値を求めなさい。



### 問題 2.3

以下の単純はりに作用する支点反力の値を求めなさい。



## 例題 2.4 等変（三角形）分布荷重が載荷された単純はりの支点反力

まず、単純はりに作用する支点反力 ( $R_A, R_B$  ならびに  $H_A$ ) は、図 2.12 に示すように正の向きに仮定する。

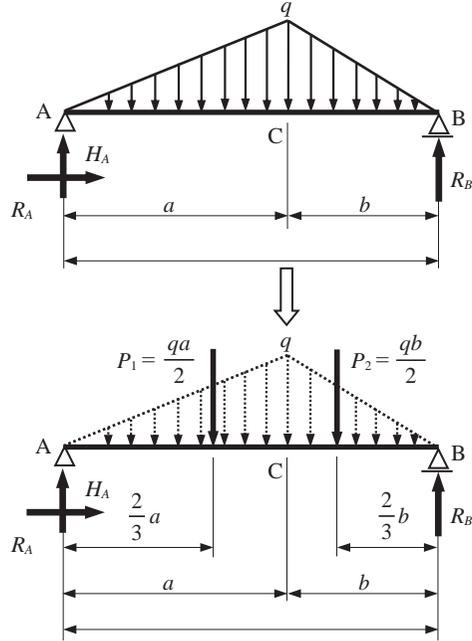


図 2.12 等変（三角形）分布荷重が載荷された単純はり

次に、AC 間および CB 間の等変（三角形）分布荷重の合力は、それぞれ、 $P_1 = qa/2$ 、 $P_2 = qb/2$  であり、作用線の位置は、図に示す通りである。

そして、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A = 0$$

$$\sum V = 0 : R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0 \text{ より, } R_A + R_B = \frac{qa}{2} + \frac{qb}{2} \quad (\text{d})$$

$$\sum M_{at A} = 0 : \frac{qa}{2} \times \frac{2}{3}a + \frac{qb}{2} \times \left( \ell - \frac{2}{3}b \right) - R_B \times \ell = 0 \text{ より,}$$

$$R_B = \frac{q}{6}(2a + b)$$

$$\text{式 (d) より, } R_A = \frac{qa}{2} + \frac{qb}{2} - R_B = \frac{q}{6}(a + 2b)$$

<検算>

$$\sum M_{at B} = 0: R_A \times \ell - \frac{qa}{2} \times \left( \ell - \frac{2}{3}a \right) - \frac{qb}{2} \times \frac{2}{3}b = 0 \text{ より,}$$

$$R_A = \frac{q}{6}(a+2b)$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、

図 2.12 の仮定通りと判定される。

### 例題 2.5 斜め方向の集中荷重と集中モーメントを受ける片持ちはり

図 2.13 に示す通り、一端を固定支点にし、一端を自由端とした、つまり、反力が生じないはりを片持ちはりと呼ぶ。

まず、片持ちはりに作用する支点反力 ( $R_A, H_A$  ならびに  $M_A$ ) は、同図に示すように正の向きに仮定する。

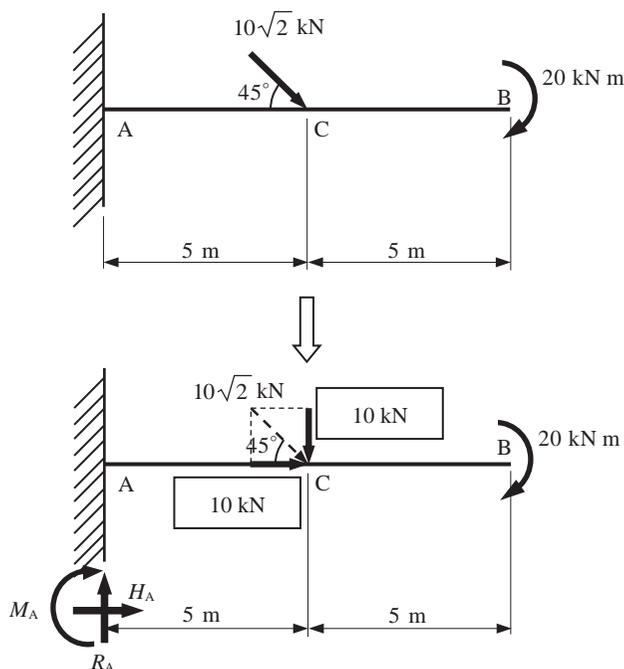


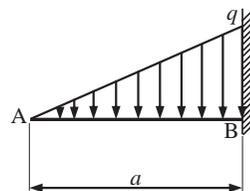
図 2.13 斜め方向の集中荷重と集中モーメントを受ける片持ちはり

次に、点 C に作用している集中荷重を、水平および鉛直力に分解する。そして、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0: H_A + 10 = 0 \text{ より, } H_A = -10 \text{ kN}$$

### 問題 2.4

以下の片持ちはりに作用する支点反力の値を求めなさい。



$$\sum V = 0 : R_A - 10 = 0 \text{ より, } R_A = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_{at A} = 0 : M_A + 10 \times 5 + 20 = 0 \text{ より, } M_A = -70 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

時計回り

<検算>

$$\sum M_{at B} = 0 : M_A + R_A \times 10 - 10 \times 5 + 20 = 0 \text{ となる。}$$

固定モーメント  $M_A$  は負であるから、仮定と逆向き（反時計回り）と判定される。

### 例題 2.6 集中荷重と等分布荷重を受ける張り出しはり

図 2.14 に示す通り、単純はりの一端または両端を外側に張り出したはりを張り出しはりと呼ぶ。

まず、張り出しはりに作用する支点反力 ( $R_A, H_A$  ならびに  $R_B$ ) は、同図に示すように正の向きに仮定する。

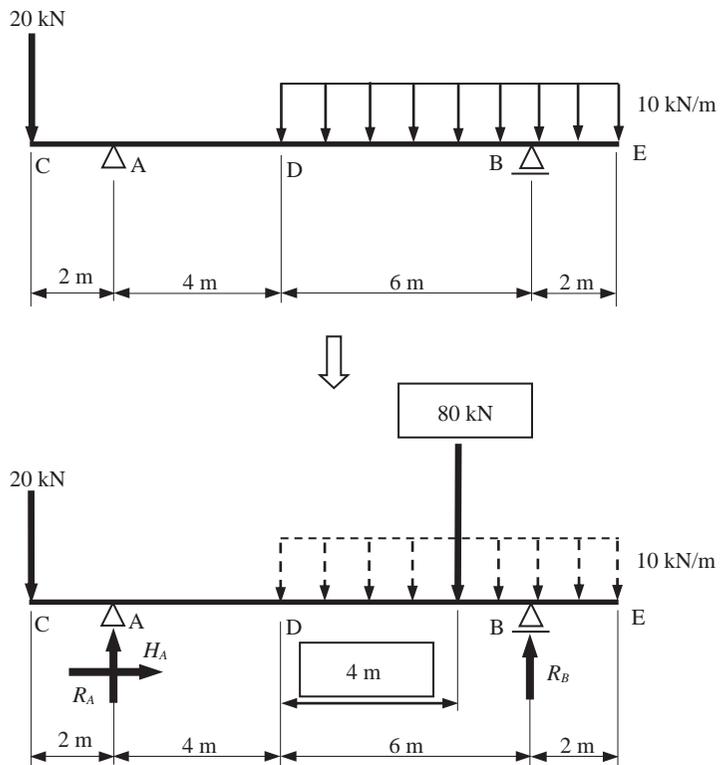


図 2.14 集中荷重と等分布荷重を受ける張り出しはり

そして、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A = 0$$

$$\sum V = 0 : R_A + R_B - 20 - 80 = 0 \text{ より, } R_A + R_B = 100 \text{ kN} \quad (\text{e})$$

$$\sum M_{at A} = 0 : -20 \times 2 + 80 \times 8 - R_B \times 10 = 0 \text{ より,}$$

$$R_B = \frac{-20 \times 2 + 80 \times 8}{10} = 60 \text{ kN}$$

式 (e) より,  $R_A = 100 - R_B = 100 - 60 = 40 \text{ kN}$

<検算>

$$\sum M_{at B} = 0 : -12 \times 20 + R_A \times 10 - 80 \times 2 = 0 \text{ より, } R_A = 40 \text{ kN}$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、

図 2.14 の仮定通りと判定される。

### 例題 2.7 集中荷重と等分布荷重を受けるゲルバーはり

ゲルバーはりとは、連続はりの中間点に新たにヒンジを設けたはりのことをいう。図 2.15 の場合、張り出しはり ABG の上に単純はり GC が載っていると考え (図 2.16)、単純はり、そして、張り出しはりの順で支点反力を求めていく。

まず、張り出しはり、単純はりに作用する支点反力 ( $R_A, H_A, R_B, R_C$  ならびに  $R_G, H_G$ ) は、図 2.16 に示すように正の向きに仮定する。

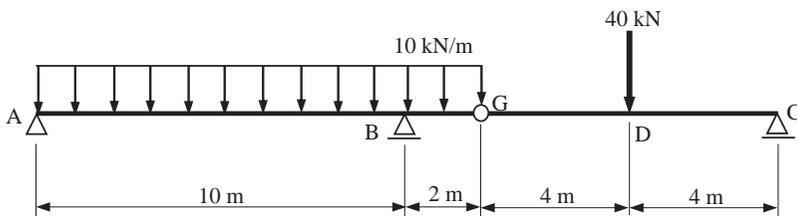
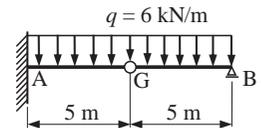


図 2.15 集中荷重と等分布荷重を受けるゲルバーはり

### 問題 2.5

以下のゲルバーを有するはりに作用する支点反力の値を求めなさい。



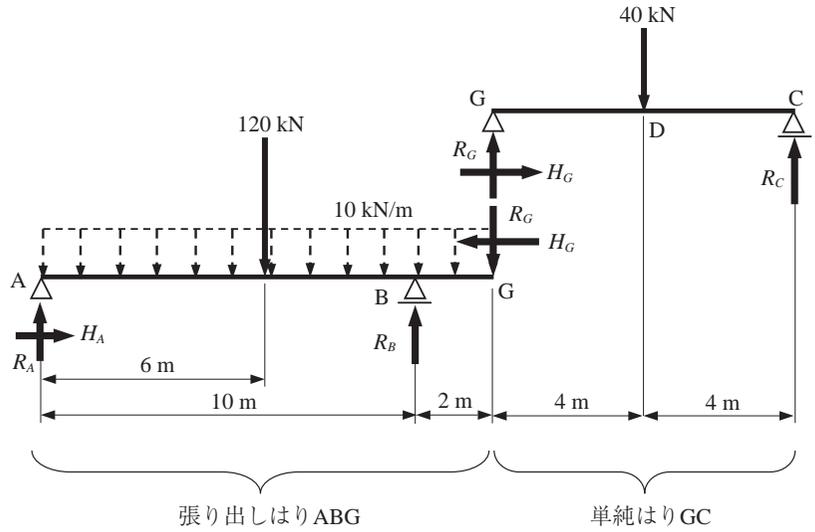


図 2.16 張り出しはりと単純はりに分割されたゲルバーはり

単純はり GC のつり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_G = 0$$

$$\sum V = 0 : R_G + R_C - 40 = 0 \text{ より, } R_G + R_C = 40 \text{ kN} \quad (\text{f})$$

$$\sum M_{at G} = 0 : 40 \times 4 - R_C \times 8 = 0 \text{ より, } R_C = \frac{40 \times 4}{8} = 20 \text{ kN}$$

式 (f) より,  $R_G = 40 - R_C = 40 - 20 = 20 \text{ kN}$

<検算>

$$\sum M_{at C} = 0 : R_G \times 8 - 40 \times 4 = 0 \text{ より, } R_G = 20 \text{ kN}$$

次に、張り出しはり ABG のつり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A - H_G = 0 \text{ より, } H_A = 0$$

$$\sum V = 0 : R_A + R_B - 120 - R_G = 0 \text{ より, } R_A + R_B = 120 + 20 = 140 \text{ kN} (\text{g})$$

$$\sum M_{at A} = 0 : 120 \times 6 - R_B \times 10 + R_G \times 12 = 0 \text{ より,}$$

$$R_B = \frac{120 \times 6 + 20 \times 12}{10} = 96 \text{ kN}$$

式 (g) より,  $R_A = 140 - R_B = 140 - 96 = 44 \text{ kN}$

<検算>

$$\sum M_{atB} = 0: R_A \times 10 - 120 \times 4 + R_G \times 2 = 0 \text{ より,}$$

$$R_A = \frac{120 \times 4 - 20 \times 2}{10} = 44 \text{ kN}$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、

図 2.16 の仮定通りと判定される。

### 別解

ヒンジでは、モーメントは伝達されず、この点まわりで考えた右もしくは左のモーメントは常にゼロとなる (図 2.17)。

$$\sum M_{atG}^{\text{右}} = 0 \text{ もしくは } \sum M_{atG}^{\text{左}} = 0$$

この考え方で、同様に、反力計算を行っていく。

$$\sum H = 0: H_A = 0 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: R_A + R_B + R_C - 120 - 40 = 0 \text{ より, } R_A + R_B + R_C = 160 \text{ kN (h)}$$

$$\sum M_{atA} = 0: 120 \times 6 - R_B \times 10 + 40 \times 16 - R_C \times 20 = 0 \text{ より,}$$

$$R_B \times 10 + R_C \times 20 = 1360 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{i})$$

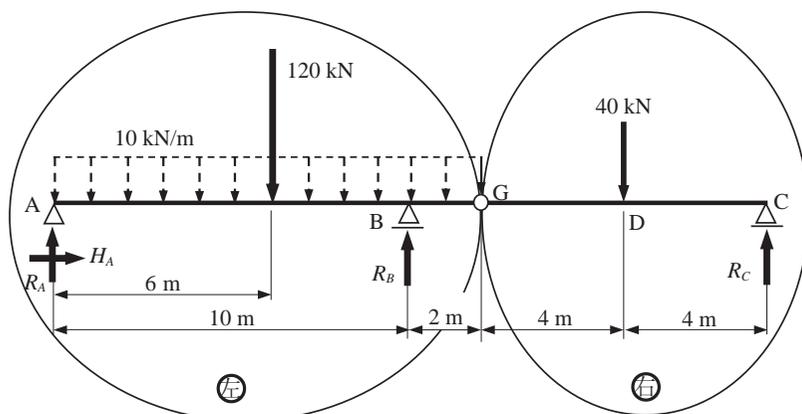


図 2.17 ヒンジ G 点で左右に分割されたゲルバーはり

$$\sum M_{atG}^{\text{右}} = 0: 40 \times 4 - R_C \times 8 = 0 \text{ より, } R_C = \frac{40 \times 4}{8} = 20 \text{ kN}$$

$$\text{式 (i) より, } R_B = \frac{1360 - 20 \times 20}{10} = 96 \text{ kN}$$

$$\text{式 (h) より, } R_A = 160 - R_B - R_C = 160 - 96 - 20 = 44 \text{ kN}$$

<検算>

$$\sum M_{at C}^{\text{左}} = 0 : R_A \times 12 - 120 \times 6 + R_B \times 2 = 44 \times 12 - 120 \times 6 + 96 \times 2 = 0$$

上記と同じ解を得ることができる。

例題 2.8 集中荷重を受ける折れはり（静定ラーメン）（図 2.18）



図 2.18 折れはり構造の一例

問題 2.6

以下の折れはりに作用する支点反力の値を求めなさい。

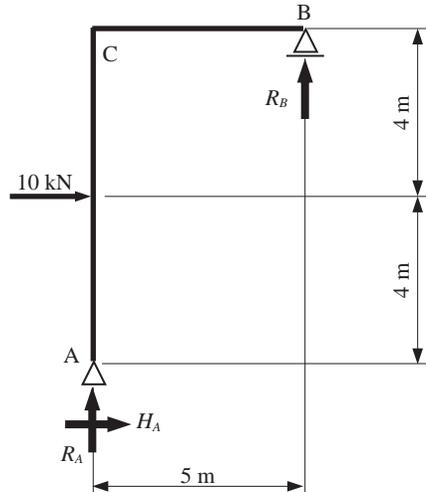
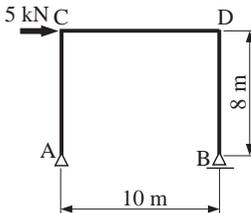


図 2.19 集中荷重を受ける折れはり

まず、折れはりに作用する支点反力 ( $R_A, H_A$  ならびに  $R_B$ ) は、図 2.19 に示すように正の向きに仮定する。

そして、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0 : H_A + 10 = 0 \text{ より, } H_A = -10 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : R_A + R_B = 0 \tag{j}$$

$$\sum M_{atA} = 0 : 10 \times 4 - R_B \times 5 = 0 \text{ より, } R_B = \frac{10 \times 4}{5} = 8 \text{ kN}$$

式 (j) より,  $R_A = -R_B = -8 \text{ kN}$

<検算>

$$\sum M_{atB} = 0 : -10 \times 4 + R_A \times 5 - H_A \times 8 = -40 - 40 + 80 = 0$$

水平反力  $H_A$  および鉛直応力  $R_A$  は負であるから仮定と逆向き,  $R_B$  の向きは仮定通りと判定される。

### 例題 2.9 複数荷重を受けるゲルバーを有する折れはり

まず, 折れはりに作用する支点反力 ( $H_A, R_A, M_A$  ならびに  $R_B$ ) は, 図 2.20 に示すように正の向きに仮定する。

そして, つり合い条件式は, 以下のように書ける。

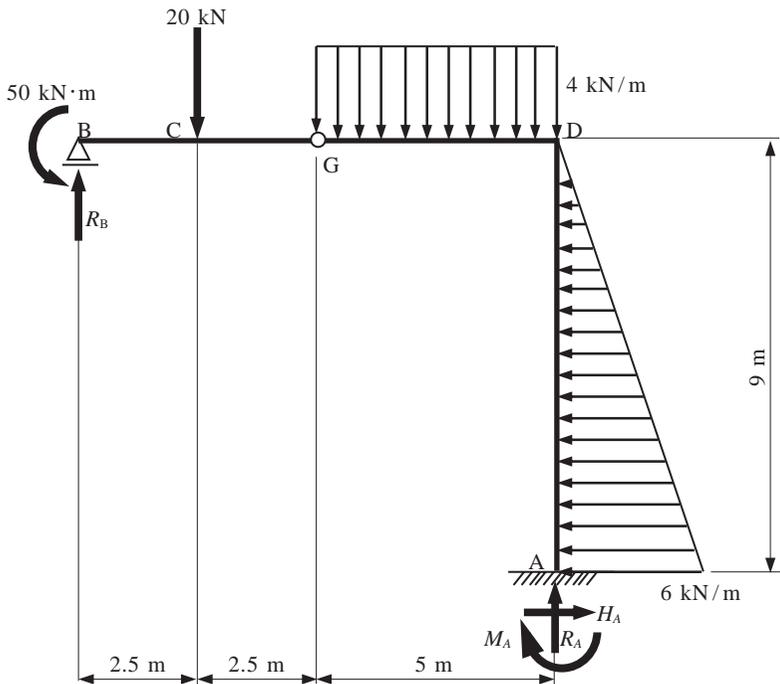


図 2.20 複数荷重を受けるゲルバーを有する折れはり

$$\sum H = 0 : H_A - 27 = 0 \text{ より, } H_A = 27 \text{ kN}$$

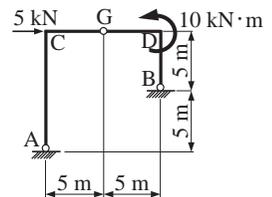
$$\sum V = 0 : R_A + R_B - 20 - 20 = 0 \text{ より, } R_A + R_B = 40 \text{ kN} \quad (\text{K})$$

$$\sum M_{atA} = 0 : M_A + R_B \times 10 - 50 - 20 \times 7.5 - 20 \times 2.5 - 27 \times 3 = 0 \text{ より,}$$

$$M_A + R_B \times 10 = 331 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{L})$$

### 問題 2.7

以下のゲルバーを有する折れはりに作用する支点反力の値を求めなさい。



$$\sum M_{atG}^{\text{右}} = 0 : R_B \times 5 - 50 - 20 \times 2.5 = 0 \text{ より,}$$

$$R_B = \frac{50 + 20 \times 2.5}{5} = 20 \text{ kN}$$

式 (k) より,  $R_A = 40 - R_B = 40 - 20 = 20 \text{ kN}$

式 (ℓ) より,  $M_A = 331 - R_B \times 10 = 331 - 20 \times 10 = 131 \text{ kN} \cdot \text{m}$

<検算>

$$\sum M_{atG}^{\text{右}} = 0 : 20 \times 2.5 + 27 \times 6 + M_A - H_A \times 9 - R_A \times 5 = 0$$

これらの反力の符号は、すべて正である。したがって、反力の向きは、

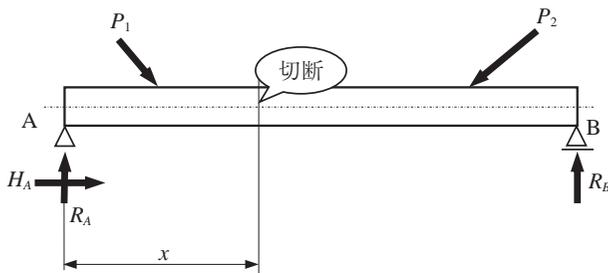
図 2.20 の仮定通りと判定される。

## 第3章 断面力の求め方

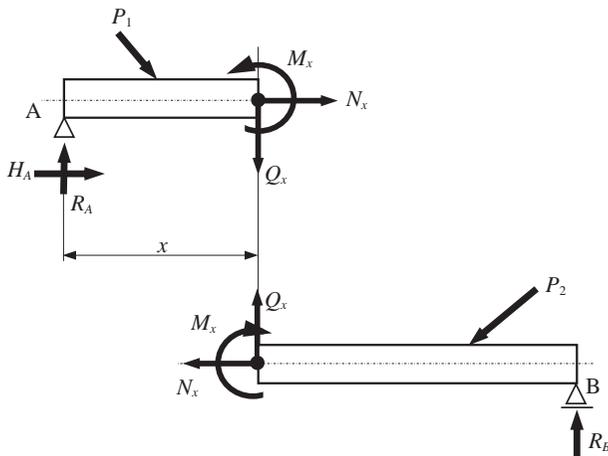
第2章では、構造物に集中荷重や等分布荷重などの**外力**が作用した際に生じる支点反力の求め方について学習した。しかし、外力によって反力が生じるだけでなく、構造物は変形し、残念ながら目で見ることはできないが、断面内にも力（= **断面力**<sup>①</sup>〈内力〉と言う）が生じる。この断面力は、構造物の設計において非常に大切であり<sup>②</sup>、本章では、その求め方について説明する。

### 3.1 断面力とは

いま、**図3.1**に示すはりを考え、点Aから $x$ 離れたところではりを切断すれば、その面から、断面力が現れる（断面力=切断面において、左右の物体が及ぼし合っている力という）。



(a) はりに作用する外力



(b) 点Aから $x$ 離れた位置に作用する断面力

図3.1 はりに作用する外力と点Aから $x$ 離れた位置に作用する断面力

① Sectional Force

② 例えば、

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_a$$

$\sigma$  (シグマ) は、単位面積あたりに作用する力、 $A$  は断面積を示す。鋼やコンクリートなどの建設材料には、設計上の制限値  $\sigma_a$  が設けられている。制限値以内になるように断面積を決めるのが設計である。第3章では、分子の断面力に相当する  $N$  の値を求める方法を勉強する。

- ③ Normal Force
- ④ Shearing Force
- ⑤ Bending Moment
- ⑥ Free Body
- ⑦ Free Body Diagram

⑧

$$\sum H = 0$$

$$\sum V = 0$$

$$\sum M = 0$$

外力は既知であるから、つり合い条件式より、3つの未知の断面力 ( $N, Q$  ならびに  $M$ ) が求められる。

この断面力には、軸方向に押し引きする**軸方向力**③:  $N$ 、部材軸に対して鉛直方向にずれる変形に抵抗する**せん断力**④:  $Q$  ならびに物体が回転したりする変形に抵抗する**曲げモーメント**⑤:  $M$  の3種類がある。

図 3.1 (b) に示すように、はり全体から取り出した物体を自由物体⑥、このつり合い状態を表している図を**自由物体図**⑦という。

はり AB が静止状態を持続するためには、それぞれの自由物体について**つり合い条件式**⑧を満足する必要がある。これは、**外力と断面力 (内力)** がつり合うことを意味する。

### 3.2 断面力の符号

いま、点 A から  $x$  離れた位置ではりを切断した際の断面力を図 3.2 (a)、点 B から  $x'$  離れた位置ではりを切断した際の断面力を図 3.2 (b) に、それぞれ示す。

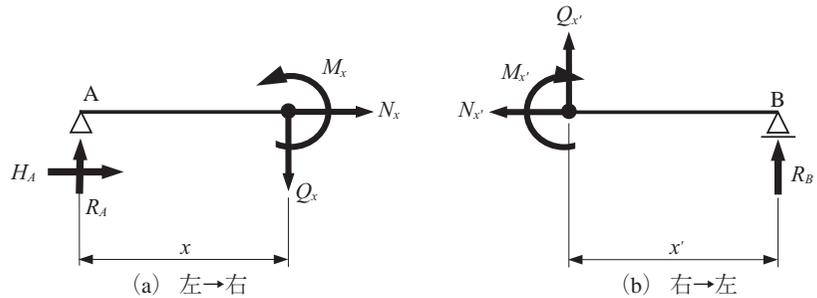


図 3.2 断面力の符号の約束

はりを切断した際、右側の断面では (図 3.2 (a))、右向き軸力  $N_x$ 、下向きのせん断力  $Q_x$ 、反時計回りの曲げモーメント  $M_x$  が正、一方、左側の断面 (図 3.2 (b)) では、左向き軸力  $N_x$ 、上向きのせん断力  $Q_x$ 、時計回りの曲げモーメント  $M_x$  が正である。

ここで、**正**の定義とは、軸力に対しては、物体を引っ張るように作用する引張力、せん断力に対しては、右下りにずれを生じさせようとする、曲げモーメントは、下に凸の曲げを生じさせようとするものである。

### 3.3 断面力の計算法

例題 3.1 支間中央に集中荷重が載荷された単純はりの断面力図

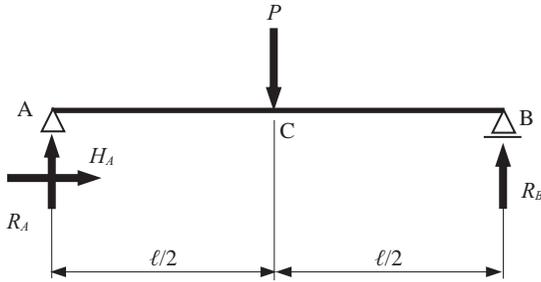


図 3.3 支間中央に集中荷重が載荷された単純はり

### 反力計算

図 3.3 に示す単純はりの支点反力の大きさは、例題 2.1 より、以下の通りになる。

$$H_A = 0, \quad R_A = \frac{P}{2}, \quad R_B = \frac{P}{2}$$

### 断面力図

1)  $0 \leq x \leq l/2$  (A → C)

点 AC 間において、点 A から  $x$  離れた箇所における自由物体図を図 3.4 に描く<sup>⑨</sup>。その箇所に正の断面力  $N_x, Q_x, M_x$  を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

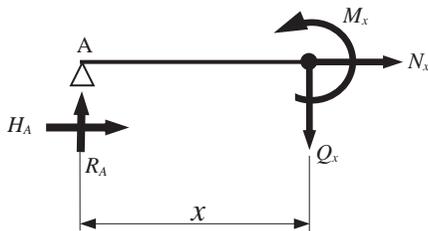


図 3.4 点 A から点 C 間で、点 A から  $x$  離れたところの自由物体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A = 0 \text{ より, } N_x = 0$$

AC 間の軸方向力は 0

$$\sum V = 0: -Q_x + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = R_A = \frac{P}{2}$$

AC 間のせん断力は  $\frac{P}{2}$  の一定値

⑨ 荷重の作用位置に着目して区間分けを行う点 C に作用する集中荷重  $P$  は含まない (∵ 点 AC 間で切断しているため)。

$$\sum M = 0: -M_x + R_A x = 0 \text{ より, } M_x = R_A x = \frac{P}{2} x$$

AC間の曲げモーメントは  $\frac{P}{2}x$  の一次式

点Aの曲げモーメントの値は  $M_A = 0$

$$\text{点Cの曲げモーメントの値は } M_C = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{P\ell}{4}$$

2)  $\ell/2 \leq x \leq \ell$  (C → B)

同じく、点CB間において、点Aから  $x$  離れた箇所における自由物体図を図3.5に描く。その箇所に正の断面力  $N_x, Q_x, M_x$  を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

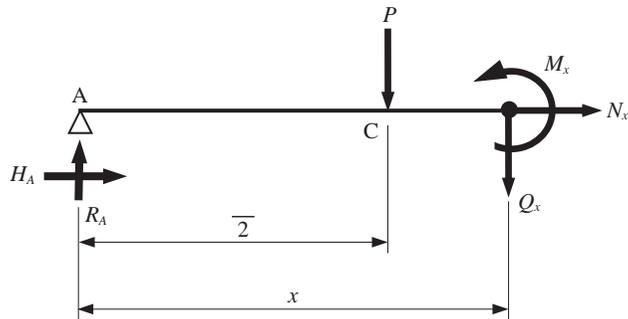


図3.5 点Cから点B間で、点Aから  $x$  離れたところの自由物体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A = 0 \text{ より, } N_x = 0$$

CB間の軸方向力は0

$$\sum V = 0: -Q_x - P + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = -P + R_A = -P + \frac{P}{2} = -\frac{P}{2}$$

CB間のせん断力は  $-\frac{P}{2}$  の一定値

$$\sum M = 0: -M_x - P\left(x - \frac{\ell}{2}\right) + R_A x = 0 \text{ より,}$$

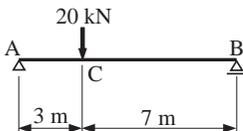
$$M_x = -P\left(x - \frac{\ell}{2}\right) + R_A x = \frac{P\ell}{2} - \frac{P}{2} x$$

CB間の曲げモーメントは  $\frac{P\ell}{2} - \frac{P}{2}x$  の一定値

$$\text{点Cの曲げモーメントの値は } M_C = \frac{P\ell}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{P\ell}{4}$$

問題 3.1

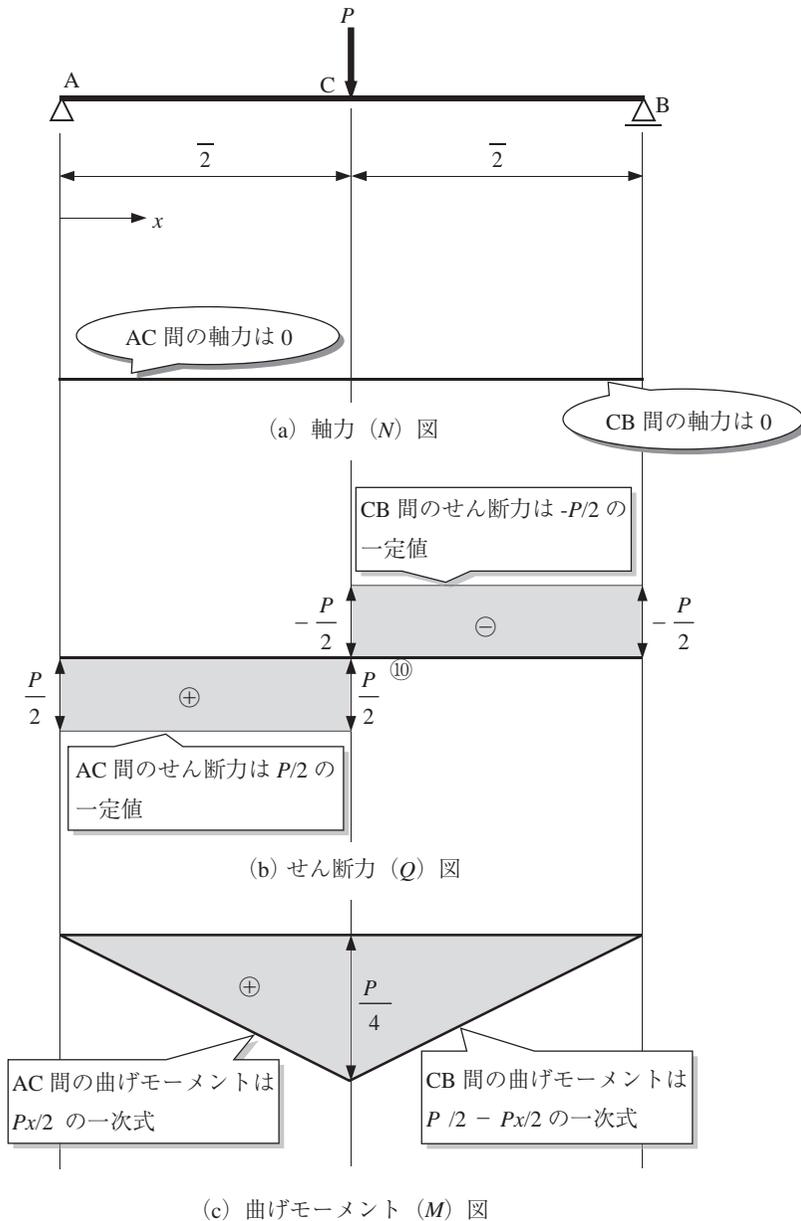
以下の単純はりの断面力図を描きなさい。



$$\text{点 B の曲げモーメントの値は } M_B = \frac{P\ell}{2} - \frac{P}{2} \cdot \ell = 0$$

以上の結果に基づき、はりの軸線に平行に 0 を表す基線を引き、断面力の変化の状況を表す断面力図（軸力図、せん断力図、曲げモーメント図）を作図する（**図 3.6**）。

はりの断面力図を描く際、基線の下側に正の値、上側に負の値を示すのが一般的である。



⑩ 2点間のせん断力の値の差は、その区間の荷重に等しい。

図 3.6 支間中央に集中荷重が载荷された単純はりの断面力図

## 例題 3.2 斜め方向の集中荷重が作用する単純はりの断面力図

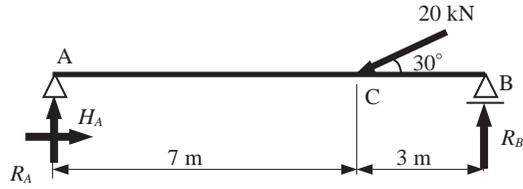


図 3.7 斜め方向の集中荷重が載荷された単純はり

## 反力計算

まず、単純はりに作用する支点反力 ( $R_A, R_B$  ならびに  $H_A$ ) は、図 3.7 に示すように正の向きに仮定する。

次に、つり合い条件式は、以下のように書ける。

$$\sum H = 0: H_A - 10\sqrt{3} = 0 \text{ より, } H_A = 10\sqrt{3} \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: R_A + R_B - 10 = 0 \text{ より, } R_A + R_B = 10 \text{ kN} \quad (\text{a})$$

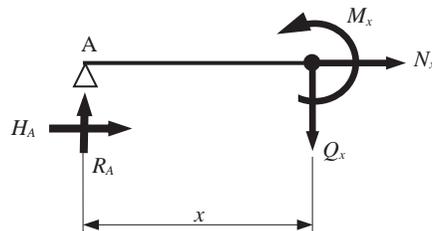
$$\sum M_{at A} = 0: 10 \times 7 - R_B \times 10 = 0 \text{ より, } R_B = \frac{10 \times 7}{10} = 7 \text{ kN}$$

式 (a) より、 $R_A = 10 - R_B = 10 - 7 = 3 \text{ kN}$

## 断面力図

1)  $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$  (A  $\rightarrow$  C)

点 AC 間において、点 A から  $x$  離れた箇所における自由物体図を図 3.8 に描く。その箇所に正の断面力  $N_x, Q_x, M_x$  を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

図 3.8 点 A から点 C 間で、点 A から  $x$  離れたところの自由体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A = 0 \text{ より, } N_x = -H_A = -10\sqrt{3} \text{ kN}$$

AC 間の軸方向力は  $-10\sqrt{3} \text{ kN}$  の一定値

$$\sum V = 0: -Q_x + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = R_A = 3 \text{ kN}$$

AC間のせん断力は3kNの一定値

$$\sum M = 0: -M_x + R_A x = 0 \text{ より, } M_x = R_A x = 3x \text{ kN}\cdot\text{m}$$

AC間の曲げモーメントは $3x \text{ kN}\cdot\text{m}$ の一次式

点Aの曲げモーメントの値は $M_A = 0$

点Cの曲げモーメントの値は $M_C = 3 \times 7 = 21 \text{ kN}\cdot\text{m}$ <sup>①</sup>

2)  $7 \leq x \leq 10 \text{ m}$  (C → B)

同じく、点CB間において、点Aから $x$ 離れた箇所における自由物体図を図3.9に描く。その箇所に正の断面力 $N_x$ 、 $Q_x$ 、 $M_x$ を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

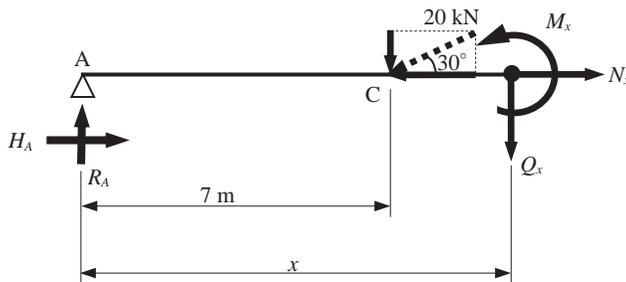


図3.9 点Cから点B間で、点Aから $x$ 離れたところの自由物体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A - 10\sqrt{3} = 0 \text{ より, } N_x = 0$$

CB間の軸方向力は0kN

$$\sum V = 0: -Q_x - 10 + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = -10 + R_A = -10 + 3 = -7 \text{ kN}$$

CB間のせん断力は $-7 \text{ kN}$ の一定値

$$\sum M = 0: -M_x - 10(x-7) + R_A x = 0 \text{ より,}$$

$$M_x = -10(x-7) + R_A x = -10x + 70 + 3x = 70 - 7x \text{ kN}\cdot\text{m}$$

CB間の曲げモーメントは $70 - 7x \text{ kN}\cdot\text{m}$ の一次式

点Cの曲げモーメントの値は $M_C = 70 - 7 \times 7 = 21 \text{ kN}\cdot\text{m}$

点Bの曲げモーメントの値は $M_B = 70 - 7 \times 10 = 0$

以上の結果に基づき、断面力図（軸力図、せん断力図、曲げモーメント図）を作図すると図3.10の通りになる。

① 曲げモーメントの単位は、力×距離であるため、 $\text{kN}\cdot\text{m}$ などになる。

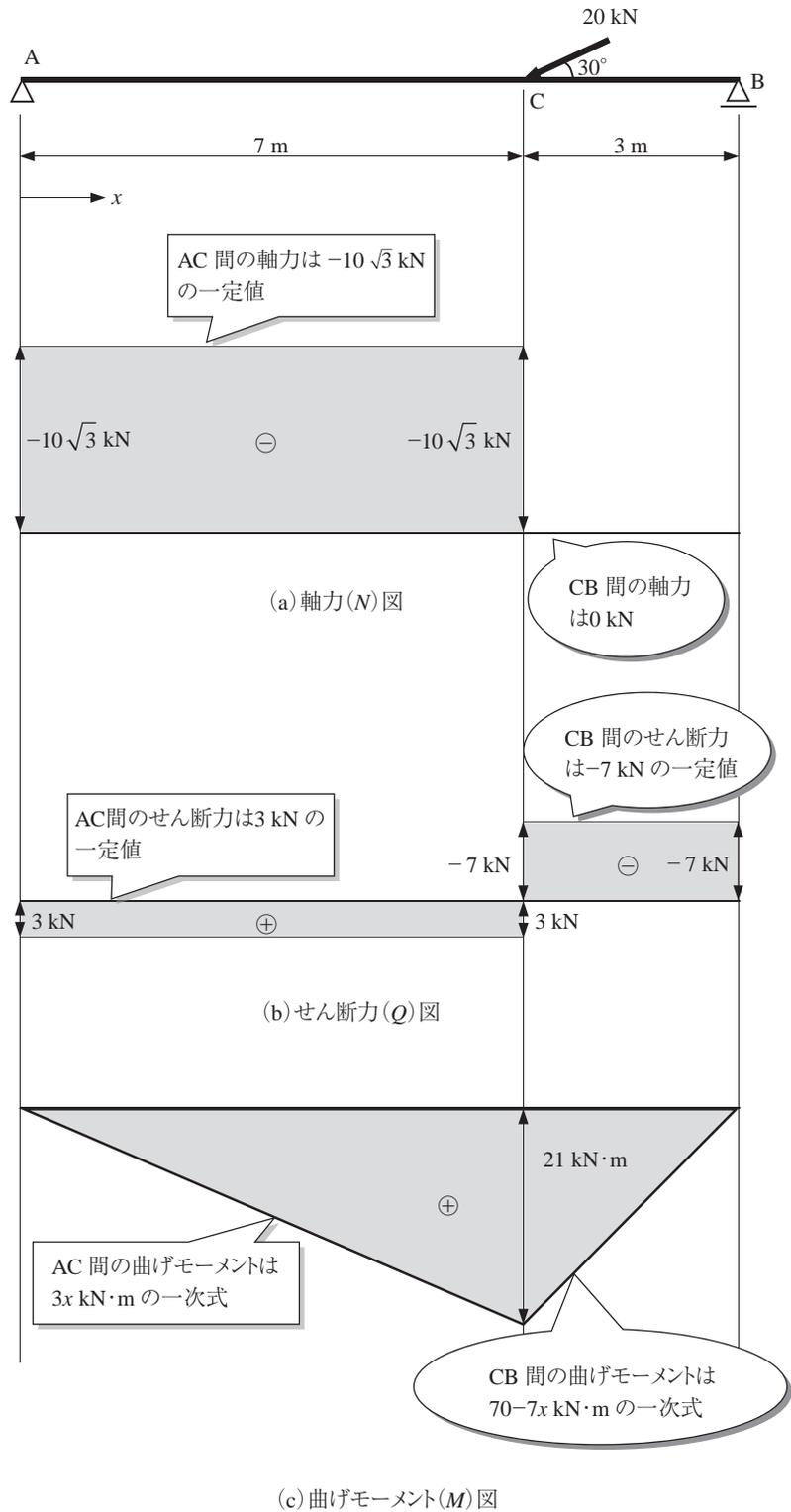


図 3.10 斜め方向の集中荷重が載荷された単純はりの断面力図

例題 3.3 等分布荷重が載荷された単純はりの断面力図

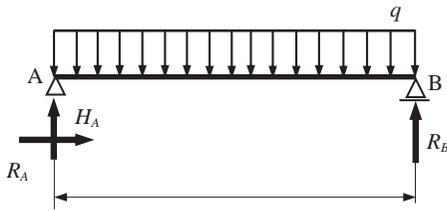


図 3.11 等分布荷重が載荷された単純はり

反力計算

図 3.11 に示す単純はりの支点反力の大きさは、例題 2.3 より、以下の通りになる。

$$H_A = 0, \quad R_A = \frac{q\ell}{2}, \quad R_B = \frac{q\ell}{2}$$

断面力計算

$$0 \leq x \leq \ell \quad (A \rightarrow C)$$

点 AB 間において、点 A から  $x$  離れた箇所における自由物体図を図 3.12 に描く<sup>⑫</sup>。その箇所に正の断面力  $N_x, Q_x, M_x$  を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

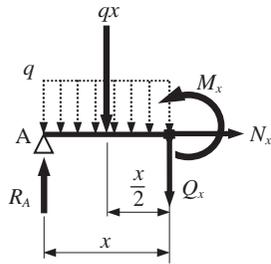


図 3.12 点 A から  $x$  離れたところの自由体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A = 0 \text{ より, } N_x = 0$$

AB 間の軸方向力は 0

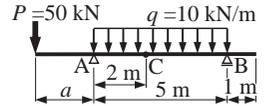
$$\sum V = 0: -Q_x - qx + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = R_A - qx = \frac{q\ell}{2} - qx$$

AB 間のせん断力は  $\frac{q\ell}{2} - qx$  の一次式

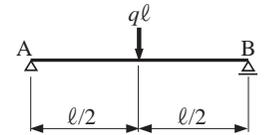
点 A のせん断力の値は  $Q_A = \frac{q\ell}{2}$

問題 3.2

集中荷重 ( $P=50 \text{ kN}$ ) と等分布荷重 ( $q=10 \text{ kN/m}$ ) が作用した張り出しはりがある。点 A から 2m 離れた点 C の曲げモーメント  $M_c$  の値が 0 (ゼロ) となる  $a$  の長さを求めなさい。



⑫ 分布荷重が載荷されたはりの断面力を求める場合、支点反力を求めるため、つまり、分布荷重を集中荷重に換算した以下のモデルで考えてはいけない。



$$\text{点 B のせん断力の値は } Q_B = \frac{q\ell}{2} - q\ell = -\frac{q\ell}{2}$$

$$\sum M = 0: -M_x - qx \cdot \frac{x}{2} + R_A x = 0 \text{ より, } M_x = R_A x - \frac{q}{2} x^2 = \frac{q\ell}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

AB 間の曲げモーメントは  $\frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2$  の二次式

点 A の曲げモーメントの値は  $M_A = 0$

点 B の曲げモーメントの値は  $M_B = 0$

点 A から  $\ell/2$  離れた箇所の曲げモーメントの値

$$M_{x=\ell/2} = \frac{q\ell}{2} \times \frac{\ell}{2} - \frac{q}{2} \times \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{q\ell^2}{8}$$

以上の結果に基づき、断面力図（軸力図、せん断力図、曲げモーメント図）を作図すると図 3.13 の通りになる。

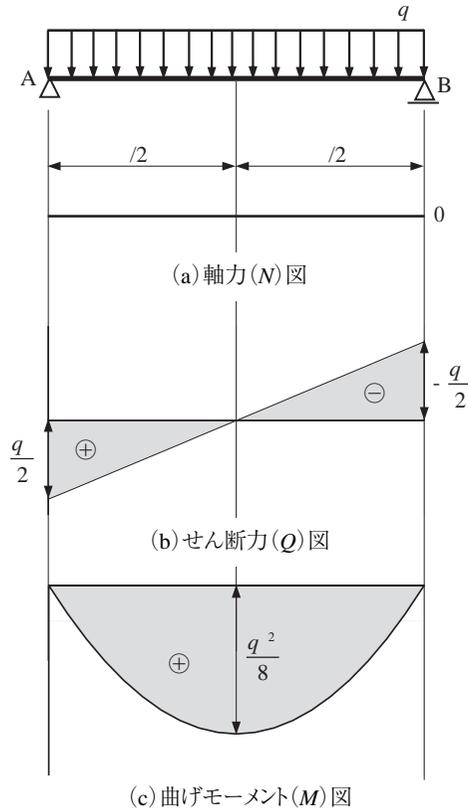


図 3.13 等分布荷重が载荷された単純はりの断面力図

ここで、構造設計において、各断面力の中でも、曲げモーメントの最大値が重要になってくる。しかし、この曲げモーメントは、例題 3.3 のように、常に、支間の中央で最大とならず、以下の関係から最大となる箇所を求める必要がある。

図3.14に分布荷重が作用するはりの全体系と微小区間のつり合いを示す。

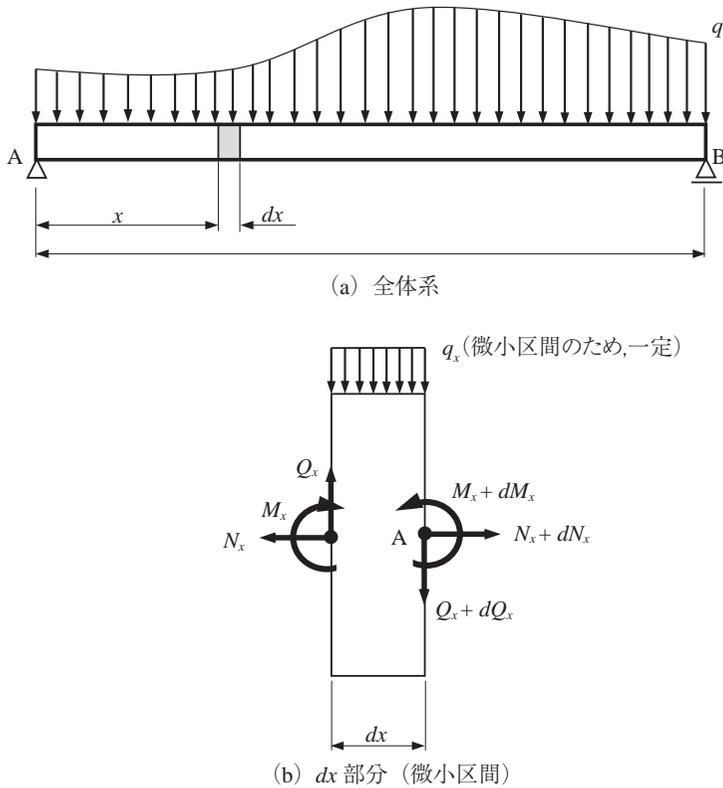


図 3.14 分布荷重が作用するはりの全体系と微小区間のつり合い

図 3.14 (b) の点 A でモーメントのつり合いを考える。

$$\sum M = 0: -(M_x + dM_x) - q_x \frac{(dx)^2}{2} + Q_x \cdot dx + M_x = 0$$

上式において、 $(dx)^2$  は、高次の微量であるから、他の項と比較して無視することができる。以上より、以下の関係式を得ることができる。

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (3.1)$$

つまり、曲げモーメント  $M_x$  を関数  $x$  で微分すると、その点のせん断力  $Q_x$  が得られる。

また、図 3.14 (b) において、鉛直方向の力のつり合いを考える。

$$\sum V = 0: -(Q_x + dQ_x) - q_x dx + Q_x = 0 \text{ より,}$$

$$\frac{dQ_x}{dx} = -q_x \quad (3.2)$$

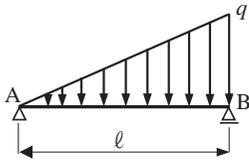
が得られ、つまり、せん断力  $Q_x$  を関数  $x$  で微分すると、その点の荷重  $q_x$  の逆符号となる。

⑬ 巻末の付録1にはりの公式を示す。各種載荷状態に対する支点反力、断面力、およびたわみを記載している。

⑭ 集中荷重による曲げモーメントの極値は、荷重の作用点、かつ、せん断力の符号が逆になる断面で生じる。

**問題 3.3**

単純はりに等変分布（三角形）荷重が作用した際、最大の曲げモーメントが発生する箇所とその値を求めなさい。



また、式 (3.1) より、曲げモーメントの極値を求めることができる。

・曲げモーメントとせん断力の関係式（各種詳細は付録1<sup>⑬</sup>を参照）

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x$$

曲げモーメント  $M_x$  が極値（最大値、最小値）となる条件は、

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x = 0$$

となる。したがって、はりのせん断力が0（ゼロ）となる箇所では、曲げモーメントは極大または極小となる<sup>⑭</sup>。

**例題 3.4 部分的に等分布荷重が載荷された単純はりの断面力図**

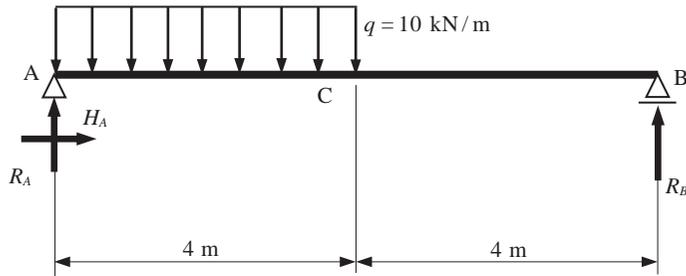


図 3.15 部分的に等分布荷重が載荷された単純はり

**反力計算**

図 3.15 に示す単純はりの支点反力の大きさは、問題 2.3 より、以下の通りになる。

$$H_A = 0, R_A = 30 \text{ kN}, R_B = 10 \text{ kN}$$

**断面力計算**

1)  $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$  (A → C)

点 AC 間において、点 A から  $x$  離れた箇所における自由物体図を図 3.16 に描く。その箇所に正の断面力  $N_x, Q_x, M_x$  を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

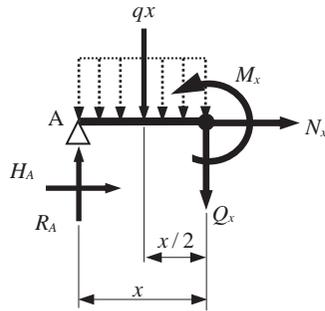


図 3.16 点 A から点 C 間で、  
点 A から  $x$  離れたと  
ころの自由体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A = 0 \text{ より, } N_x = 0 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: -Q_x - qx + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = R_A - qx = 30 - 10x \text{ kN} \quad (b)^{\text{⑮}}$$

$$\sum M = 0: -M_x - \frac{q}{2}x^2 + R_A x = 0 \text{ より, } M_x = 30x - 5x^2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (c)$$

⑮

$$\frac{dM_x}{dx} = 30 - 10x = Q_x$$

$$\frac{dQ_x}{dx} = -10 = -q$$

2)  $4 \leq x \leq 8 \text{ m}$  (C → B)

同じく、点 CB 間において、点 A から  $x$  離れた箇所における自由物体図を図 3.17 に描く。その箇所に正の断面力  $N_x, Q_x, M_x$  を作用させ、つり合い条件によって、以下の結果が得られる。

上式より、曲げモーメントおよびせん断力の誘導式が正しいことを確認することができる。

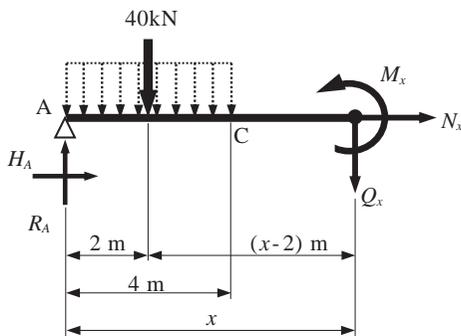


図 3.17 点 C から点 B 間で、点 A から  $x$  離れたと  
ころの自由体図

$$\sum H = 0: N_x + H_A = 0 \text{ より, } N_x = 0 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: -Q_x - 40 + R_A = 0 \text{ より, } Q_x = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0: -M_x - 40 \times (x - 2) + R_A \times x = 0 \text{ より,}$$

$$M_x = 80 - 10x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

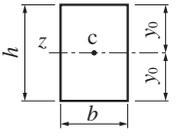
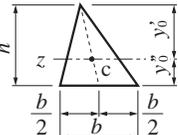
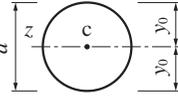
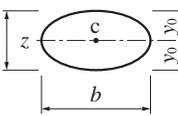
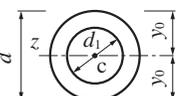
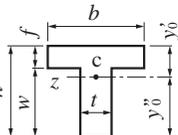
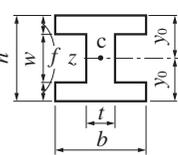
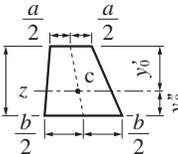


付録1 はりの公式一覧

載荷状態	せん断力、 モーメント図	支点反力、せん断力	曲げモーメント	たわみ	最大たわみ
		$R_A = R_B = \frac{P}{2}$ $S_1 = S_2 = \frac{P}{2}$	$M_1 = \frac{Px}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$ $M_c = \frac{Pl}{4}$	$y_1 = \frac{Pl^2}{16EI} \left( \frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^2} \right)$ $(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$	$y_c = \frac{Pl^3}{48EI}$
		$R_A = S_1 = \frac{Pb}{l}$ $R_B = -S_2 = \frac{Pa}{l}$	$M_1 = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$ $M_2 = \frac{Pa}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b)$ $M_c = \frac{Pab}{l}$	$y_1 = \frac{Pa^2b^2}{6EI} \left( 2 \frac{x_1}{a} + \frac{x_1}{b} - \frac{x_1^3}{a^2b} \right)$ $(0 \leq x_1 \leq a)$ $y_2 = \frac{Pa^2b^2}{6EI} \left( 2 \frac{x_2}{b} + \frac{x_2}{a} - \frac{x_2^3}{ab^2} \right)$ $(0 \leq x_2 \leq b)$	$y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EI}$ $y_{max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ $\left( x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right)$ $(a > b \text{ のとき})$
		$R_A = R_B = P$ $S_1 = -S_3 = P$ $S_2 = 0$	$M_1 = Px, \quad M_2 = Pa$ $M_c = P(l-x)$	$y_1 = \frac{Px}{6EI} (3a(l-a) - x^2)$ $(0 \leq x \leq a)$ $y_2 = \frac{Pa}{6EI} (3x(l-a) - a^2)$ $(a \leq x \leq l-a)$	$y_{max} = \frac{Pa}{24EI}$ $\times (3l^2 - 4a^2)$ $\left( x = \frac{l}{2} \right)$
		$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$ $S = \frac{ql}{2} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)$	$M = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$	$y = \frac{ql^4}{24EI} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$y_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$
		$R_A = q \frac{bl}{l}$ $R_B = q \frac{al}{l}$ $S_1 = R_A \quad (0 \leq x \leq s)$ $S_2 = R_A - q(x-s)$ $(s \leq x \leq d)$ $S_3 = -R_B \quad (d \leq x \leq l)$	$M_1 = R_A x \quad (0 \leq x \leq s)$ $M_2 = R_A x - \frac{q}{2} (x-s)^2 \quad (s \leq x \leq d)$ $M_3 = R_B (l-x) \quad (d \leq x \leq l)$ $M_c = q \left( \frac{ab}{l} - \frac{\lambda}{8} \right)$ $M_{max} = \frac{ab\lambda}{l^2} q \left( l - \frac{\lambda}{2} \right)$	$y_1 = \frac{q}{24EI} \left[ -4 \frac{\lambda}{l} \left( l - s - \frac{\lambda}{2} \right) x^3 + \left\{ \frac{d^4}{l} - 4d^3 + 4\lambda l(d+s) - \frac{s^4}{l} + 4s^3 \right\} x \right]$ $y_2 = \frac{q}{24EI} \left[ x^4 - 4 \left( \lambda - \frac{\lambda s}{l} - \frac{\lambda^2}{2l} + s \right) x^3 + 6s^2 x^2 + \left\{ \frac{d^4}{l} - 4d^3 + 4\lambda l(d+s) - \frac{s^4}{l} \right\} x + s^4 \right]$ $y_3 = \frac{q}{24EI} \left[ 4 \frac{\lambda}{l} \left( s + \frac{\lambda}{2} \right) x^3 - 12\lambda \left( s + \frac{\lambda}{2} \right) x^2 + \left\{ \frac{1}{l} (s+\lambda)^4 + 4\lambda l(d+s) - \frac{s^4}{l} \right\} x + s^4 - d^4 \right]$	
		$R_A = \frac{ql}{6}$ $R_B = \frac{ql}{3}$ $S = \frac{ql}{6} \left( 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} \right)$	$M = \frac{ql^2}{6} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right)$ $M_{max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} = 0.06415ql^2$ $\left( x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.5774l \right)$	$y = \frac{ql^4}{360EI}$ $\times \left( 7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right)$	$y_{max} = 0.006522 \frac{ql^4}{EI}$ $(x = 0.5193l)$
		$R_A = -\frac{M_0}{l}$ $R_B = \frac{M_0}{l}$ $S = -\frac{M_0}{l}$	$M_1 = -\frac{M_0}{l} x \quad (0 \leq x \leq a)$ $M_2 = \frac{M_0}{l} (l-x) \quad (a \leq x \leq l)$ $-M_{max} = -\frac{a}{l} M_0 \quad (\text{左側})$ $+M_{max} = \frac{b}{l} M_0 \quad (\text{右側})$	$y_1 = \frac{M_0 x}{6EI} (x^2 - a^2 - 2ab + 2b^2)$ $(0 \leq x \leq a)$ $y_2 = \frac{M_0 (l-x)}{6EI} (-x^2 - 2lx - 3a^2)$	
		$R_B = -S = P$	$M = -Px$ $M_{max} = -Pl$	$y = \frac{Pl^2}{6EI} \left( 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right)$	$y_A = \frac{Pl^2}{3EI}$
		$R_B = -S_2 = P$ $(0 \leq x' \leq b)$ $S_1 = 0$	$M_1 = 0$ $M_2 = -P(b-x') \quad (0 \leq x' \leq b)$ $M_{max} = -Pb \text{ (点B)}$	$y_1 = \frac{Pb^3}{6EI} \left( 3 \frac{x'}{b} - 1 \right) \quad (b \leq x' \leq l)$ $y_2 = \frac{Pb^3}{6EI} \left( 3 \frac{x'^2}{b^2} - \frac{x'^3}{b^3} \right) \quad (0 \leq x' \leq b)$	$y_A = \frac{Pb^2(3l-b)}{6EI}$
		$R_B = ql$ $S = -qx$	$M = -\frac{qx^2}{2}$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{2} \text{ (点B)}$	$y = \frac{ql^4}{24EI} \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$y_A = \frac{ql^4}{8EI}$

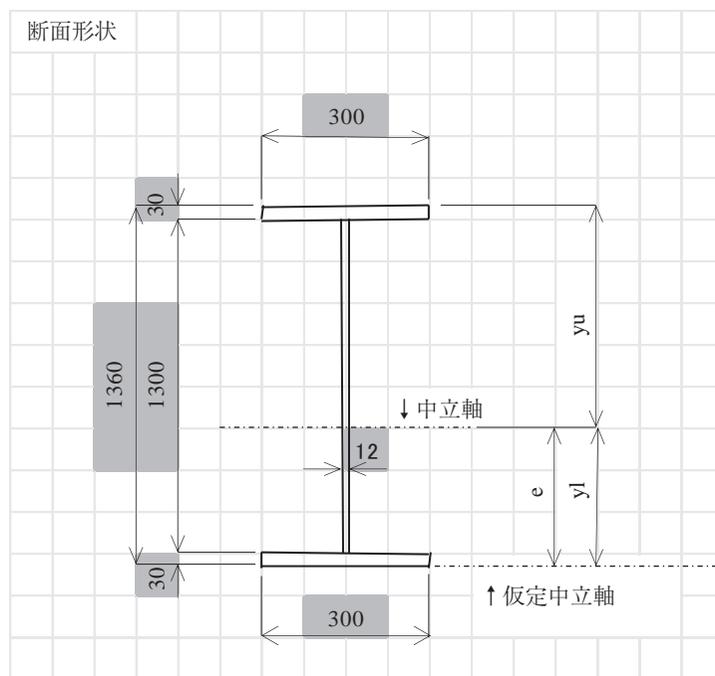
載荷状態	せん断力、 モーメント図	支点反力、 せん断力	曲げモーメント	たわみ	最大たわみ
		$R_B = 0$ $S = 0$	$M_1 = 0$ $M_2 = -M_0$ $M_{max} = -M_0$	$y_1 = \frac{M_0 b}{2EI} (2x' - b) \quad (b \leq x' \leq l)$ $y_2 = \frac{M_0 x'^2}{2EI} \quad (0 \leq x' \leq b)$	$y_{max} = \frac{M_0 b}{2EI} (2l - b)$
		$R_A = S_1 = \frac{5}{16}P$ $R_B = -S_2 = \frac{11}{16}P$	$M_1 = \frac{5}{16}Px \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$ $M_2 = P(\frac{l}{2} - \frac{11}{16}x) \quad (\frac{l}{2} \leq x \leq l)$ $M_C = \frac{5}{32}Pl$ $M_{max} = M_B = -\frac{3}{16}Pl$	$y_1 = \frac{P^3}{96EI} (\frac{3x}{l} - \frac{5x^3}{l^3}) \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$ $y_2 = \frac{P^3}{96EI} (\frac{11x}{l} - 2)(1 - \frac{x}{l})^2 \quad (\frac{l}{2} \leq x \leq l)$	$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{Pl^3}{48EI}$ ( $x = 0.4472l$ )
		$R_A = S_1 = \frac{Pb^2}{2l^2} (a + 2l)$ $R_B = -S_2 = \frac{P}{2} (\frac{3a}{l} - \frac{a^3}{l^3})$	$M_1 = R_A x \quad (0 \leq x \leq a)$ $M_2 = R_A x - P(x - a) \quad (a \leq x \leq l)$ $M_B = -\frac{Pa(l^2 - a^2)}{2l^2}$ $M_C = \frac{Pa}{2} (2 - \frac{3a}{l} + \frac{a^3}{l^3})$	$y_1 = \frac{Pb^2 x}{12EI l^2} [3al^2 - (2l + a)x] \quad (0 \leq x \leq a)$ $y_2 = \frac{Pa(l-x)^2}{12EI l^2} [(3l^2 - a^2)x - 2a^2 l] \quad (a \leq x \leq l)$	$y_C = \frac{Pb^2 a^2}{12EI l^2} \times (3 + \frac{a}{l})$
		$R_A = \frac{3}{8}ql$ $R_B = \frac{5}{8}ql$ $S = ql(\frac{3}{8} - \frac{x}{l})$	$M = \frac{qlx}{8} (\frac{3}{4} + \frac{x}{l})$ $-M_{max} = M_B = -\frac{ql^2}{8}$ $+M_{max} = \frac{9}{128}ql^2 \quad (x = \frac{3}{8}l)$	$y = \frac{ql^4}{48EI} (\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4})$	$y_{max} = -\frac{ql^4}{184.6EI}$ ( $x = \frac{l}{16}(1 + \sqrt{33})$ $= 0.4215l$ )
		$R_A = S_1 = \frac{P}{2}$ $R_B = -S_2 = \frac{P}{2}$	$M_1 = \frac{Pl}{2} (\frac{x}{l} - \frac{1}{4}) \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$ $M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}$ $M_C = \frac{Pl}{8}$	$y_1 = \frac{P^3}{16EI} (\frac{x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{3l^3}) \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$	$y_{max} = \frac{Pl^3}{192EI}$
		$R_A = S_1 = P \frac{b}{l^2} \times (l^2 - a^2 + ab)$ $R_B = -S_2 = P \frac{a}{l^2} \times (l^2 - b^2 + ab)$	$M_1 = R_A x + M_A \quad (0 \leq x \leq a)$ $M_2 = R_B (l - x) + M_B \quad (a \leq x \leq l)$ $M_A = -P \frac{ab^2}{l^2}$ $M_C = 2P \frac{a^2 b^2}{l^3}$ $M_B = -P \frac{ba^2}{l^2}$	$y_1 = \frac{Pb^2 x^2}{6l^2 EI} (3al - 3ax - bx) \quad (0 \leq x \leq a)$ $y_2 = \frac{Pb^2 x^2}{6l^2 EI} \left\{ \frac{l^3 (x-a)^3}{b^2 x^2} + 3al - 3ax - bx \right\} \quad (a \leq x \leq l)$	$y_C = \frac{Pa^2 b^2}{3EI l^2}$
		$R_A = R_{0A} - \frac{M_A - M_B}{l}$ $R_B = R_{0B} - \frac{M_A - M_B}{l}$ $S = S_0 - \frac{M_A - M_B}{l}$	$M = M_0 + M_A (\frac{l-x}{l}) + M_B \frac{x}{l}$ $M_A = -\frac{qa}{12l^2} \left[ 12(b + \frac{a}{2})(l - b - \frac{a}{2})^2 - a^2 \left\{ 2l - 3(b + \frac{a}{2}) \right\} \right]$ $M_B = -\frac{qa}{12l^2} \left[ 12(b + \frac{a}{2})(l - b - \frac{a}{2})^2 - a^2 \left\{ 3(b + \frac{a}{2}) - l \right\} \right]$	注) $R_0, S_0, M_0$ は梁 AB を単純梁と考えたときの反力、せん断力、曲げモーメントを示す。	
		$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$ $S = \frac{ql}{2} (1 - 2\frac{x}{l})$	$M = -\frac{ql^2}{2} (\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2})$ $M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $M_C = \frac{ql^2}{24}$	$y = \frac{ql^4}{24EI} (\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4})$	$y_C = \frac{ql^4}{384EI}$

## 付録2 断面諸量の公式一覧

断面形状	断面積 (A)	2軸 (図心を通る) より縁までの距離 (y)	断面2次モーメント ( $I_x$ )
	$bh$	$y_0 = \frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$
	$\frac{bh}{2}$	$y_0' = \frac{2}{3}h$ $y_0'' = \frac{1}{3}h$	$\frac{bh^3}{36}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$y_0 = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$
	$\frac{\pi ab}{4}$	$y_0 = \frac{a}{2}$	$\frac{\pi a^3 b}{64}$
	$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$	$y_0 = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)$
	$bf + wt$	$y_0' = \frac{th^2 + f^2(b-t)}{2(bf + wt)}$ $y_0'' = h - y_0'$	$\frac{ty_0'^3 + by_0''^3}{3} - \frac{(b-t)(y_0' - f)^3}{3}$
	$bh - w(b-t)$	$y_0 = \frac{h}{2}$	$\frac{bh^3 - w^3(b-t)}{12}$
	$\frac{1}{2}(a+b)h$	$y_0' = \frac{a+2b}{a+b} \frac{h}{3}$ $y_0'' = \frac{2a+b}{a+b} \frac{h}{3}$	$\frac{a^2 + 4ab + b^2}{36(a+b)} h^3$

## 付録3 表計算ソフトによる任意のI形断面に対する断面2次モーメント算出例

実際の設計で用いられている表計算ソフトにより断面2次モーメントを計算している事例を示す。表計算ソフトでは、断面形状を入力すると、自動的に中立軸や断面2次モーメントを算出できるようになっている。



断面諸元				A (mm <sup>2</sup> )	y (mm)	Ay (mm <sup>3</sup> )	Ay <sup>2</sup> (mm <sup>4</sup> )	I (mm <sup>4</sup> )
1上フランジ	b	x	h	9,000	1,345	12,105,000	16,281,225,000	675,000
	300	x	30					
1腹板	h	x	b	15,600	680	10,608,000	7,213,440,000	2,197,000,000
	1,300	x	12					
1下フランジ	b	x	h	9,000	15	135,000	2,025,000	675,000
	300	x	30					
Σ A =				33,600 mm <sup>2</sup>	Σ Ay =	22,848,000 mm <sup>3</sup>	Σ (Ay <sup>2</sup> +I) =	25,695,040,000 mm <sup>4</sup>
e =				680 mm	Σ Ae <sup>2</sup> =			15,536,640,000 mm <sup>4</sup>
y <sub>u</sub> =				680 mm	y <sub>l</sub> =	680 mm	Σ (Ae <sup>2</sup> +I) - Σ Ae <sup>2</sup> =	10,158,400,000 mm <sup>4</sup>

計算の流れとしては、断面最下部を仮の中立軸位置と設定し、各長方形断面の断面積と断面1次モーメントから中立軸位置 ( $y_u$ ,  $y_l$ ) を算出している。その後、式 (5.18) を用いて仮定中立軸における断面2次モーメントを算出し、最後に中立軸の位置での補正を行い、最終的な断面2次モーメントを算出している。

## 問題解答

### 第 2 章

#### 問題 2.1

$$H_A = 0 \text{ kN}, \quad R_A = 14 \text{ kN}, \quad R_B = 6 \text{ kN}$$

#### 問題 2.2

$$H_A = 0, \quad R_A = \frac{5}{6}wa, \quad R_B = \frac{7}{6}wa$$

#### 問題 2.3

$$H_A = 0 \text{ kN}, \quad R_A = 30 \text{ kN}, \quad R_B = 10 \text{ kN}$$

#### 問題 2.4

$$H_B = 0, \quad R_B = \frac{qa}{2}, \quad M_B = -\frac{qa^2}{6}$$

#### 問題 2.5

$$H_A = 0 \text{ kN}, \quad R_A = 45 \text{ kN}, \quad M_A = -150 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$R_B = 15 \text{ kN}$$

#### 問題 2.6

$$H_A = -5 \text{ kN}, \quad R_A = -4 \text{ kN}, \quad R_B = 4 \text{ kN}$$

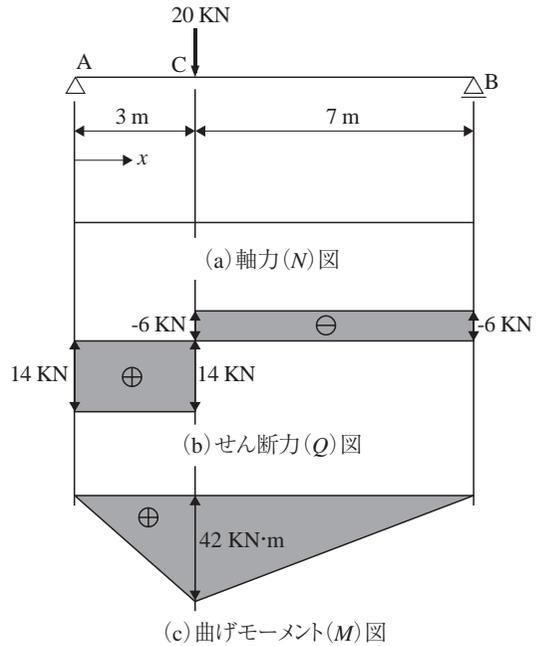
#### 問題 2.7

$$H_A = -1 \text{ kN}, \quad R_A = -2 \text{ kN}, \quad H_B = -4 \text{ kN},$$

$$R_B = 2 \text{ kN}$$

### 第 3 章

#### 問題 3.1



#### 問題 3.2

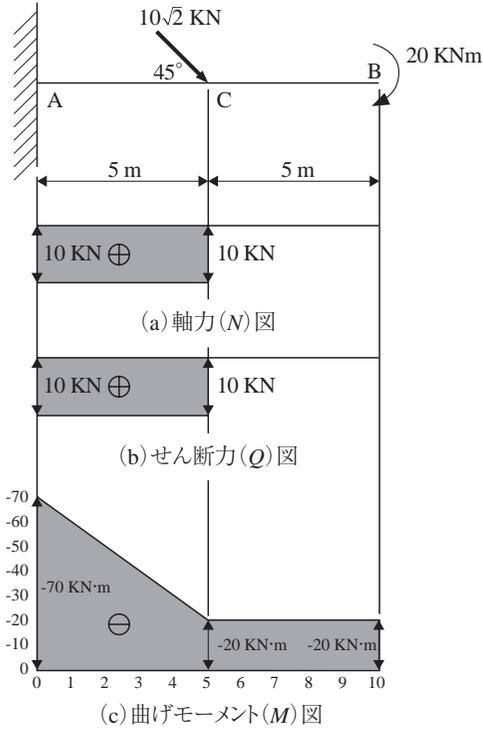
$$a = 1 \text{ m}$$

#### 問題 3.3

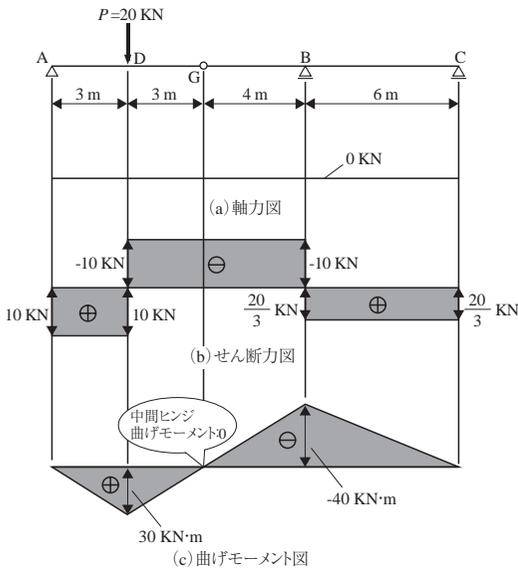
曲げモーメントは、点 A から  $\frac{\ell}{\sqrt{3}}$  の箇所

生じ、その大きさは  $\frac{9\ell^2}{9\sqrt{3}}$  となる。

問題 3.4



問題 3.5



第 4 章

問題 4.1

$$S3 = \frac{\sqrt{5}}{2} P$$

$$S4 = -\frac{\sqrt{5}}{2} P$$

$$L2 = \frac{1}{2} P$$

問題 4.2

$$R_a = \frac{2P1 + P2}{3}$$

$$U1 = -\left(\frac{2P1 + P2}{2}\right)$$

$$S1 = \left(\frac{-5P1 + 5P2}{12}\right)$$

$$L1 = \frac{3P1 + 3P2}{4}$$

第 5 章

問題 5.1

図心座標  $(y_0, z_0) = (29.4 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$

問題 5.2

$$I_z = 804000 \text{ mm}^4$$

問題 5.3

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} P$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} P$$

$$\sigma_3 = \frac{E_3}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} P$$

---

**第 11 章**
**問題 11.1**

$$N_{u0} = 1.24 \times 10^6 \text{ N}$$

**問題 11.2**

$$\sigma'_c = 7.04 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma'_s = 38.1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 162 \text{ N/mm}^2$$

**問題 11.3**

$$\sigma'_c = 8.32 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 117 \text{ N/mm}^2$$

**問題 11.4**

$$M_u = 8.82 \times 10^9 \text{ Nmm}$$

---

**第 12 章**
**問題 12.1**

$$l/r = 50 : \sigma_u = 337.7 \text{ N/mm}^2$$

$$l/r = 100 : \sigma_u = 153.1 \text{ N/mm}^2$$

**問題 12.2**

$$\sigma_u = 307 \text{ N/mm}^2$$

**問題 12.3**

$$(a) t = 11.3 \text{ mm}$$

$$(b) t = 34.4 \text{ mm}$$

**問題 12.4**

$$I_s = 3.16 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

**問題 12.5**

$$I_v = 5.75 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

**問題 12.6**

$$M_p = 13,804 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

**問題 12.7**

$$M_p = 17,172 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

**問題 12.8**

$$P_u = 9M_p / (2l)$$

**問題 12.9**

$$P_u = 6M_p / l$$

**問題 12.10**

点 C に塑性ヒンジが生じて崩壊する場合：

$$P_u = 2M_p / l$$

点 C に塑性ヒンジが生じない場合：

$$P_u = N_Y / 2 + M_p / l$$

**問題 12.11**

$$P_u = 3M_p / (2l)$$

**問題 12.12**

$$P_u = 5M_p / l$$

## 索引

## あ

I形鋼 64  
 圧縮応力 162, 196  
 圧縮力 161, 194  
 異形鉄筋 176  
 移動荷重 117  
 インフラ構造物 1  
 影響線 109  
 影響線図 111  
 エネルギー法 121  
 オイラーの弾性座屈荷重 166  
 応力度 (応力) 2, 59, 174  
 応力とひずみの関係 60, 174  
 応力分布 198  
 帯鉄筋 179  
 折れはり 20, 43

## か

回転角 83  
 外的安定 142  
 外的静定 142  
 外的不安定 142  
 外的不静定 142  
 外力 10, 23  
 核 163  
 重ねはり 140, 210  
 荷重 6  
 カステリアノの定理 129  
 仮想仕事の原理 125  
 片持ちはり 15, 36, 85, 129  
 間接荷重 113  
 完全弾塑性 (体) 167, 178, 201  
 基準圧縮強度 (曲線) 195  
 基準耐荷力 (曲線) 195  
 基準曲げ圧縮強度 (曲線) 196  
 共役はり 98  
 境界条件 84, 161  
 強軸断面 67  
 クリープ変形 175

形状係数 203  
 ケーブル 209  
 ゲルバーはり 17, 41, 106  
 ゲルバーヒンジ 139, 210  
 鋼桁 198  
 鋼構造 193  
 剛性 47  
 合成桁 109, 198  
 降伏応力 201  
 降伏棚 201  
 降伏モーメント 202  
 固定支点 9

## さ

細骨材 173  
 最小仕事の原理 135  
 細長比パラメータ 167  
 材料力学 2  
 座屈 60, 161, 194  
 座屈応力 167  
 座屈荷重 165  
 残留応力 193  
 仕事 121  
 軸力 53, 68, 122, 144  
 支点反力 9, 111  
 終局ひずみ 187  
 集中荷重 6, 23, 81, 119, 133, 149  
 集中モーメント 8, 102  
 自由物体図 24  
 上路プレートガーダー 67  
 初期降伏 202  
 初期不整 161, 195  
 初期変形 193  
 真応力 201  
 図心 61  
 性能照査型設計 173  
 静定トラス 144  
 静定はり 142, 205  
 切断法 55, 114  
 節点法 53

セメント 173  
 全塑性モーメント 202  
 全体座屈 165, 195  
 せん断力 24, 73, 81, 124, 145  
 相反定理 124  
 粗骨材 173  
 塑性断面係数 203  
 塑性ヒンジ 193, 202, 205  
 塑性崩壊 205

## た

耐荷性能 2  
 耐震性能 2  
 たわみ 79, 110  
 たわみ角法 145  
 たわみの微分方程式 79  
 単位荷重法 125  
 単純はり 10, 24, 72, 89, 113, 146  
 弾性荷重法 77, 98  
 弾性方程式 132  
 短柱 164  
 単鉄筋矩形はり 182  
 断面1次モーメント 61  
 断面2次モーメント 63  
 断面力 23, 107, 126  
 力の三要素 5  
 力のつり合い 5  
 中立軸 71  
 長柱 168  
 つり合い条件式 24  
 つり合い鉄筋比 190  
 つり合い破壊 190  
 鉄筋コンクリート 173  
 鉄筋比 183  
 デルタ関数 81  
 等価応力ブロック法 187  
 等分布荷重 7, 23, 81, 119, 128  
 等方等質な材料 59  
 等変分布荷重 8  
 トラス 47, 111, 127, 143  
 トレスル橋脚 52

## な

内的安定 143  
 内的静定 144  
 内的不安定 144  
 内的不静定 144  
 内的不静定次数 144  
 内力 24

## は

配合 173  
 バイリニアモデル 202  
 ハウトラス 48  
 柱 161  
 ばね支持 137  
 張り出しはり 16  
 バリノンの定理 6  
 反力 23, 86  
 微小変形理論 118  
 ひずみ 2, 60, 174  
 ひずみエネルギー 122  
 ひずみエネルギー最小の原理 136  
 ひずみ硬化領域 178, 201  
 引張応力 163, 203  
 微分方程式 77  
 ピン結合 47  
 ヒンジ支点 9  
 複鉄筋矩形はり 183  
 部材角 146  
 不静定構造物 141  
 不静定次数 141  
 不静定トラス 136, 144  
 不静定はり 85, 131, 142, 207  
 フックの法則 60, 78, 121, 181  
 プラットトラス 48  
 プレストレストコンクリート 173  
 分布荷重 6, 31, 99, 119  
 平行弦トラス 48  
 平面保持の仮定 71, 77, 182  
 ベティの相反定理 125  
 ヘビサイド関数 81  
 変位法 145  
 変形の適合条件 142, 178

偏心荷重 162  
偏心距離 162  
崩壊荷重 201  
補強鉄筋 176  
ポニートラス 49  
ボルチモアトラス 51

## ま

マクスウェルの相反定理 125  
曲げ圧縮破壊 189  
曲げ引張破壊 190  
曲げモーメント 24, 53, 80, 123, 145, 162, 182, 195

## や

ヤング係数 60, 122, 169, 175, 195

ヤング係数比 182  
有効座屈長 (有効座屈係数) 167  
溶接箱形断面 195  
横倒れ座屈 195  
余力法 131

## ら

らせん鉄筋 179  
ラチス桁 50  
ラーメン構造 49, 138, 155  
両端固定はり 149  
ローラー支点 9

## わ

ワーレントラス 48, 129

## 執筆者紹介

### 編著者

大垣 賀津雄（おおがき かづお）（1章, 11章）

ものづくり大学 技能工芸学部 建設学科 教授 博士（工学）

1961年1月，大阪府生まれ。大阪市立大学工学部土木工学科卒業。大阪市立大学大学院工学研究科土木工学専攻修了。1986年4月～川崎重工業株式会社勤務。2000年12月長岡技術科学大学より博士（工学）学位授与。2015年4月～ものづくり大学技能工芸学部建設学科教授。技術士（建設部門，総合技術監理部門）

### 著者

大山 理（おおやま おさむ）（2章, 3章）

大阪工業大学 工学部 都市デザイン工学科 教授 博士（工学）

1973年1月，京都府生まれ。大阪工業大学工学部土木工学科卒業。大阪工業大学大学院工学研究科土木工学専攻修了，博士（工学）学位授与。2001年4月～片山ストラテック（現：日本ファブテック）株式会社勤務。2005年4月～大阪工業大学工学部都市デザイン工学科講師，准教授を経て2016年4月～現職。

石川 敏之（いしかわ としゆき）（8章, 10章, 12章）

関西大学 環境都市工学部 都市システム工学科 教授 博士（工学）

1973年5月，兵庫県生まれ。近畿大学理工学部土木工学科卒業。大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻修了。2002年9月～駒井鉄工(株)に勤務。2005年9月大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻博士後期課程修了，博士（工学）学位授与。2005年10月～大阪大学大学院工学研究科特任研究員。2007年8月～名古屋大学大学院環境学研究科助教。2010年4月～京都大学大学院工学研究科助教。2015年4月～関西大学環境都市工学部准教授を経て2022年4月～現職

谷口 望（たにぐち のぞむ）（4章, 5章, 7章）

日本大学 理工学部 交通システム工学科 教授 博士（工学）

1973年6月，北海道生まれ。早稲田大学理工学部土木工学科卒業。早稲田大学大学院理工学研究科建設工学専攻修士課程修了。早稲田大学大学院理工学研究科建設工学専攻博士課程修了。1999年4月～早稲田大学理工学部土木工学科助手。2001年4月～財団法人鉄道総合技術研究所勤務。2001年7月早稲田大学より博士（工学）学位授与。2008年4月～京都大学工学研究科社会基盤工学専攻特定助教。2010年4月～財団法人鉄道総合技術研究所勤務。2013年4月～前橋工科大学社会環境工学科准教授。2021年4月～現職。技術士（建設部門）

宮下 剛（みやした たけし）（6章, 9章）

名古屋工業大学 特任教授 博士（工学）

1975年8月，埼玉県生まれ。東京大学工学部土木工学科卒業。東京大学工学系研究科社会基盤学専攻修士課程修了。東京大学工学系研究科社会基盤学専攻博士課程修了。2005年9月東京大学より博士（工学）学位授与。2005年4月～日本学術振興会特別研究員（DC2, PD）。2006年4月～長岡技術科大学工学部助教，特任講師，准教授を経て，2024年4月～現職。

基礎から実践  
構造力学

2024年4月23日 初版第1刷



編著 大垣 賀津雄  
著者 大山 理  
石川 敏之  
谷口 望  
宮下 剛  
印刷所 モリモト印刷  
製本所 モリモト印刷

発行所 理工図書 株式会社  
〒102-0082 東京都千代田区一番町 27-2  
電話 03-3230-0221(代表)  
FAX 03(3262)8247  
振替口座 00180-3-36087 番  
<http://www.rikohtosho.co.jp>  
お問合せ [info@rikohtosho.co.jp](mailto:info@rikohtosho.co.jp)

© 大垣 賀津雄 2024

Printed in Japan

ISBN 978-4-8446-0944-5 C3052

**JCOPY** <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail:info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。